

Lineare Algebra 2: Algebraische Strukturen - Übungsblatt 5 -

Aufgabe 11.

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Für zwei Elemente $g, h \in G$ definiert man $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$. Sei

$$[G, G] := \{[g_1, h_1] \cdot \dots \cdot [g_n, h_n] : n \in \mathbb{N}_{>0}, g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_n \in G\}.$$

- a) Zeigen Sie, dass $([G, G], \cdot)$ eine normale Untergruppe von $(G, \cdot)$ ist.
- b) Zeigen Sie, dass $(G, \cdot)$ genau dann eine abelsche Gruppe ist, wenn gilt $[G, G] = \{1_G\}$.
- c) Zeigen Sie, dass für eine normale Untergruppe $(N, \cdot)$ von $(G, \cdot)$ die Quotientengruppe $(G/N, \cdot)$ genau dann abelsch ist, wenn gilt $[G, G] \subseteq N$.

Aufgabe 12.

Gegeben sei die Menge $X := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, sowie die Teilmenge

$$R := \{((a, b), (a', b')) \in X \times X : ab' = ba'\} \subset X \times X.$$

- a) Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation auf X ist.
- b) Sei $Q := X/R$. Für $(a, b) \in X$ werde die zugehörige Äquivalenzklasse mit $[a, b] \in Q$ bezeichnet. Zeigen Sie: Für Elemente $[a, b], [c, d] \in Q$ sind die Ausdrücke
$$[a, b] + [c, d] := [ad + bc, bd] \quad \text{und} \quad [a, b] \cdot [c, d] := [ac, bd]$$
wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl von Repräsentanten.
- c) Zeigen Sie, dass $(Q, +)$ eine abelsche Gruppe ist.
- d) Zeigen Sie, dass $(Q, +, \cdot)$ ein Körper ist.
- e) Konstruieren Sie einen Isomorphismus von Körpern zwischen $(Q, +, \cdot)$ und $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

Abgabetermin: Mittwoch, 04.12.2019 vor der Vorlesung