Eberhard Karls Universität Tübingen Wintersemester 2019/20

Fachbereich Mathematik

PD Dr. Jörg Zintl

Lineare Algebra 2: Algebraische Strukturen
- Übungsblatt 6 -

Aufgabe 13.
Seien $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$.

a) Zeigen Sie: Die Gruppe $(m\mathbb{Z}, +)$ ist genau dann eine Untergruppe von $(n\mathbb{Z}, +)$, wenn es ein $d \in \mathbb{N}$ gibt mit $m = dn$.

b) Sei $d \in \mathbb{N}$ mit $m = dn$. Zeigen Sie: $(n\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$ ist isomorph zu $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \cdot)$.

c) Verifizieren Sie die Aussage des 2.Noetherschen Isomorphiesatzes am Beispiel der Quotientengruppe der Gruppe $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$ nach der Untergruppe $(n\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$.

Aufgabe 14.
Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, und $\emptyset \neq M \subseteq G$ eine Teilmenge. Sei

$$\langle M \rangle \;:=\; \bigcap_{\substack{U \leq G \text{ Untergruppe} \\ \text{mit } M \subseteq U}} U.$$

a) Zeigen Sie, dass $(\langle M \rangle, \cdot)$ eine Untergruppe von $(G, \cdot)$ ist.

b) Zeigen Sie die Gleichheit der Mengen

$$\langle M \rangle \;=\; \{g_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot g_n^{\varepsilon_n} : \; n \in \mathbb{N}_{>0},\, g_1, \ldots, g_n \in M,\, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 0, 1\}\}\,.$$

c) Bestimmen Sie die Untergruppe $(\langle M \rangle, \cdot) \leq (\mathrm{Gl}_2(\mathbb{R}), \cdot)$ für

$$M \;:=\; \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{R}) : \; b \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Abgabetermin: Mittwoch, 11.12.2019 vor der Vorlesung