Eberhard Karls Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
PD Dr. Jörg Zintl

Wintersemester 2019/20

Lineare Algebra 2: Algebraische Strukturen
- Übungsblatt 7 -

Aufgabe 15.
Sei $(G, \cdot)$ eine endliche Gruppe, und $\alpha : G \to G$ für $g \in G$ definiert durch $\alpha(g) := g \cdot g$.

a) Zeigen Sie: α ist genau dann ein Gruppenhomomorphismus, wenn $(G, \cdot)$ abelsch ist.

b) Sei $(G, \cdot)$ abelsch. Zeigen Sie: Ist $\mathrm{ord}(G)$ ungerade, dann ist α ein Isomorphismus.

c) Sei $(G, \cdot)$ abelsch. Zeigen Sie: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ord}(\ker(\alpha)) = 2^n$.

d) Sei $G := (\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^*$ die Einheitengruppe von $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Bestimmen Sie $[G : \ker(\alpha)]$.

Aufgabe 16.
Sei $(G, \cdot)$ eine endliche Gruppe. Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Es sei

$$n := |\{g \in G : \ \mathrm{ord}(g) = p\}|$$

die Anzahl der Elemente in G der Ordnung p. Zeigen Sie: $(p-1)|n$.

Hinweis: Betrachten Sie Untergruppen der Form $\langle g \rangle$ mit $g \in G$.

Abgabetermin: Mittwoch, 08.01.2020 vor der Vorlesung