**Eberhard Karls Universität Tübingen** Wintersemester 2019/20
## Fachbereich Mathematik
PD Dr. Jörg Zintl

# Lineare Algebra 2: Algebraische Strukturen
# - Übungsblatt 9 -

**Aufgabe 19.**
Sei $(\mathbb{R}[X],+,\cdot)$ der Ring der Polynome mit reellen Koeffizienten in einer Variablen $X$.

**a)** Zeigen Sie, dass das "Auswerten" eines Polynoms $f\in\mathbb{R}[X]$ an der Stelle $i\in\mathbb{C}$ einen Ringhomomorphismus definiert:

$$\begin{array}{rccc}\varphi_i: & \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{C} \\ & f & \mapsto & f(i)\end{array}$$

**b)** Sei $\langle 1+X^2\rangle\subset\mathbb{R}[X]$ das Ideal im Polynomring, das vom Polynom $1+X^2\in\mathbb{R}[X]$ erzeugt wird. Sei $Q:=\mathbb{R}[X]/\langle 1+X^2\rangle$ der Quotientenring. Zeigen Sie, dass für jedes Element $\overline{f}\in Q$ reelle Zahlen $a,b\in\mathbb{R}$ existieren mit $\overline{f}=\overline{a+bX}$.

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst die Gleichheit $\overline{X^2}=\overline{-1}$.

**c)** Zeigen Sie: $\varphi_i$ ist surjektiv, mit $\langle 1+X^2\rangle\subseteq\ker(\varphi_i)$.

**d)** Konstruieren Sie einen Isomorphismus von Ringen

$$\mathbb{R}[X]/\langle 1+X^2\rangle \;\cong\; \mathbb{C}.$$

**Aufgabe 20.**
Bestimmen Sie die Inversen der folgenden Einheiten in $\mathbb{Q}[[X]]$:

$$f:=\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)X^i \quad\text{ und }\quad e:=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}X^i.$$

**Abgabetermin: Mittwoch, 22.01.2020 vor der Vorlesung**