Eberhard Karls Universität Tübingen Wintersemester 2019/20

Fachbereich Mathematik

PD Dr. Jörg Zintl

Lineare Algebra 2: Algebraische Strukturen - Übungsblatt 12 -

Aufgabe 25.
Seien $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$ mit eindeutigen Primfaktorzerlegungen

$$\begin{aligned} a &= \varepsilon_a\, q_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot q_{n_a}^{\lambda_{n_a}} \\ b &= \varepsilon_b\, r_1^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot r_{n_b}^{\mu_{n_b}} \end{aligned}$$

mit $n_a, n_b \in \mathbb{N}_{>0}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n_a}, \mu_1, \ldots, \mu_{n_b} \in \mathbb{N}_{>0}$, $q_1, \ldots, q_{n_a}, r_1, \ldots, r_{n_b} \in \mathbb{N}$ prim und $\varepsilon_a, \varepsilon_b \in \{\pm 1\}$. Die *gemeinsame erweiterte Primfaktorzerlegung von a und b* ist definiert durch

$$\begin{aligned} a &= \varepsilon_a\, p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n} \\ b &= \varepsilon_b\, p_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n} \end{aligned}$$

wobei $\{p_1, \ldots, p_n\} := \{q_1, \ldots, q_{n_a}\} \cup \{r_1, \ldots, r_{n_b}\}$, mit $1 \leq n \leq n_a + n_b$, und für $i = 1, \ldots, n$

$$\alpha_i := \begin{cases} \lambda_i & \text{falls } p_i \in \{q_1, \ldots, q_{n_a}\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \quad \beta_i := \begin{cases} 0 & \text{sonst} \\ \mu_i & \text{falls } p_i \in \{r_1, \ldots, r_{n_b}\}. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

$$\operatorname{ggT}(a, b) = \left\{ \pm \prod_{i=1}^{n} p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)} \right\}$$

$$\operatorname{kgV}(a, b) = \left\{ \pm \prod_{i=1}^{n} p_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)} \right\}.$$

Aufgabe 26. *(Abschlusstest WS 2017/18)*
Gegeben seien die beiden Systeme von Kongruenzgleichungen

$$\textbf{a)} \quad \begin{aligned} x &\equiv 3 \mod 8 \\ x &\equiv 3 \mod 20 \\ x &\equiv 19 \mod 22 \end{aligned} \qquad \textbf{b)} \quad \begin{aligned} x &\equiv 5 \mod 6 \\ x &\equiv 7 \mod 18 \\ x &\equiv 47 \mod 60 \end{aligned}$$

Bestimmen in beiden Fällen jeweils die Menge aller Lösungen $x \in \mathbb{Z}$.

Keine Abgabe!