Eberhard Karls Universität Tübingen Wintersemester 2019/20
Fachbereich Mathematik
PD Dr. Jörg Zintl

Lineare Algebra 2: Multilineare Algebra
- Übungsblatt 1 -

Aufgabe 1. (Präsenzübung, keine Abgabe)
Ein *Gruppoid* ist eine Kategorie, in der jeder Morphismus ein Isomorphismus ist. Es sei $\mathcal{C}$ eine solche Kategorie, und für alle $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ sei $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ eine Menge. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$ in kanonischer Weise die Struktur einer Gruppe hat.

Aufgabe 2. (Präsenzübung, keine Abgabe)
Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Seien $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ Objekte, und $f : A \to B$ und $g : B \to C$ sowie $h, h' : B \to A$ Morphismen in $\mathcal{C}$. Beweisen Sie:

a) Ist $\mu_{A,B,C}(g, f)$ ein Monomorphismus, dann ist auch f ein Monomorphismus.
b) Ist $\mu_{A,B,C}(g, f)$ ein Epimorphismus, dann ist auch g ein Epimorphismus.
c) Der Morphismus id_A ist ein Mono-, Epi- und Isomorphismus.
d) Ist f ein Isomorphismus, dann ist f auch ein Mono- und ein Epimorphismus.
e) Gelten die Gleichheiten $h \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ h' = \mathrm{id}_B$, dann gilt auch $h = h'$.

Aufgabe 3.
a) Zeigen Sie, dass ein Morphismus $f : A \to B$ in der Kategorie (Set) der Mengen genau dann ein Epimorphismus ist, wenn er surjektiv ist.
b) Zeigen Sie, dass ein Morphismus $f : V \to W$ in der Kategorie (K-VR) der Vektorräume über einem Körper K genau dann ein Epimorphismus ist, wenn er surjektiv ist.

Aufgabe 4.
Beweisen Sie:

a) Jeder Morphismus $f : X \to Y$ in $\mathcal{C} = (\mathrm{Set})$ lässt sich schreiben als $f = m \circ e$, wobei e ein Epimorphismus und m ein Monomorphismus ist.
b) Zu jedem Monomorphismus $f : U \to V$ in $\mathcal{C} = (\mathbb{R}\text{-VR})$ gibt es einen Epimorphismus $e : V \to W$ und einen Isomorphismus $j : U \to W$ mit $j = e \circ f$.

Abgabetermin für Aufgaben 3&4: Mittwoch, 23.10.2019 vor der Vorlesung