Eberhard Karls Universität Tübingen Wintersemester 2019/20

Fachbereich Mathematik

PD Dr. Jörg Zintl

Lineare Algebra 2: Multilineare Algebra - Übungsblatt 6 -

Aufgabe 13.
Sei $(R,+,\cdot)$ ein kommutativer Ring mit Einselement und $(M,+_M,\cdot_M)$ ein R-Modul. Sei

$$T(M) := \{m \in M :\ \exists\, r \in R \text{ mit } r \neq 0 \text{ und } r \cdot_M m = 0_M\}.$$

a) Zeigen Sie: Falls $(R,+,\cdot) = (K,+,\cdot)$ ein Körper ist, dann ist $T(M) = \{0\}$.

b) Sei $R = \mathbb{R}[X]$ der Ring der Polynome in einer Variablen X, und $M := \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ der Modul aller Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit punktweise definierter Verknüpfung und punktweise definierter Operation. Zeigen Sie, dass $T(M)$ die Struktur eines Untermoduls von M besitzt.

c) Gilt die Aussage von **b)** auch für den Ring

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \text{Mat}(2,2,\mathbb{R}) :\ a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

und den R-Modul $M := \text{Mat}(2,2,\mathbb{R})$, mit den offensichtlichen Verküpfungen und Operationen?

Aufgabe 14.
Sei $(R,+,\cdot)$ ein kommutativer Ring mit Einselement. Für einen R-Modul $(M,+_M,\cdot_M)$ sei $M^* := \text{Hom}_R(M,R)$, zusammen mit den punktweise definierten Verknüpfungen, der dazu duale Modul.

a) Zeigen Sie: Es gibt einen Isomorphismus von R-Modulen

$$R^* \cong R.$$

b) Sei $M = \mathbb{R}[X]$ der $\mathbb{R}$-Modul der Polynome in einer Variablen X, und $\mathbb{R}[[X]]$ der $\mathbb{R}$-Modul der formalen Konvergenzreihen in X (ohne Konvergenzbegriff!). Zeigen Sie: Es gibt einen Isomorphismus von R-Modulen

$$\mathbb{R}[X]^* \cong \mathbb{R}[[X]].$$

Abgabetermin: Donnerstag, 28.11.2019 vor der Vorlesung