**Eberhard Karls Universität Tübingen** Wintersemester 2019/20

## Fachbereich Mathematik

PD Dr. Jörg Zintl

# Lineare Algebra 2: Multilineare Algebra - Übungsblatt 8 -

**Aufgabe 17.**
Es sei $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ das Standard-Skalarprodukt, sowie $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung

$$(u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) := (u_2v_3 - u_3v_2, -u_1v_3 + u_3v_1, u_1v_2 - u_2v_1).$$

**a)** Zeigen Sie, dass $\times$ bilinear ist.

**b)** Zeigen Sie: Für alle $u, v \in \mathbb{R}^3$ gilt $u \times v = -v \times u$.

**c)** Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Beweisen Sie eine der Gleichheiten

$$\langle u, v \times w \rangle \; = \; \langle v, w \times u \rangle \; = \langle w, u \times v \rangle.$$

**d)** Zeigen Sie: Sind $u, v \in \mathbb{R}^3$ linear abhängig über $\mathbb{R}$, dann gilt $u \times v = 0_{\mathbb{R}^3}$.

**e)** Zeigen Sie: Für alle $u, v \in \mathbb{R}^3$ gilt $\langle u, u \times v \rangle = 0$ und $\langle v, u \times v \rangle = 0$.

**f)** *optional:* Seien $u, v \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$. Es sei $E$ die durch $u$ und $v$ aufgespannte Ebene, und $P$ das durch $u$ und $v$ in der Ebene $E$ aufgespannte Parallelogramm. Zeigen Sie:

Der Flächeninhalt von $P$ ist gleich dem Betrag von $u \times v$.

Sie können dazu für $u, v, w, x \in \mathbb{R}^3$ die folgende Formel benutzen:

$$\langle u \times v, w \times x \rangle \; = \; \langle u, w \rangle \langle v, x \rangle - \langle v, w \rangle \langle u, x \rangle.$$

**Aufgabe 18.**
Gegeben sei $(\mathbb{Z}^2, +, \cdot)$ als $\mathbb{Z}$-Modul.

**a)** Zeigen Sie: Die Menge $B := \{(0, 2), (2, 0)\}$ ist $\mathbb{Z}$-linear unabhängig, lässt sich aber nicht zu einer Basis von $(\mathbb{Z}^2, +, \cdot)$ ergänzen.

**b)** Zeigen Sie: Die Menge $E := \{(0, 3), (1, 1), (2, 0)\}$ ist ein Erzeugendensystem von $(\mathbb{Z}^2, +, \cdot)$, jedoch lässt sich daraus keine Basis von $(\mathbb{Z}^2, +, \cdot)$ auswählen.

**Abgabetermin: Donnerstag, 12.12.2019 vor der Vorlesung**