Eberhard Karls Universität Tübingen Wintersemester 2019/20
Fachbereich Mathematik
PD Dr. Jörg Zintl

Lineare Algebra 2: Multilineare Algebra - Übungsblatt 9 -

Aufgabe 19.
Betrachten Sie $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ als $\mathbb{R}$-Modul, zusammen mit dem $\mathbb{R}$-Modul der Polynome mit reellen Koeffizienten $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$. Sei

$$\tau : \quad \mathbb{C} \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}[X]$$

die Abbildung, die man durch Multiplikation eines Polynoms $f \in \mathbb{R}[X]$ mit einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ erhält.

a) Zeigen Sie, dass τ nicht surjektiv ist.

b) Zeigen Sie, dass τ ein Tensorprodukt ist.

c) Überprüfen Sie, dass die Abbildung $\varphi : \mathbb{C} \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}$ mit $\varphi(z, f) := z \cdot f(0)$ bilinear ist, und geben Sie den dazu gehörigen $\mathbb{R}$-Modulhomomorphismus $\tilde{\varphi}$ an.

Aufgabe 20.
Seien $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$, und sei d der größte gemeinsame Teiler von m und n. Betrachten Sie $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ als $\mathbb{Z}$-Moduln. Beweisen Sie:

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \;\cong\; \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}.$$

Hinweis: Sie dürfen die Tatsache benutzen, dass es ganze Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$ gibt für die gilt $d = pm + qn$. Zeigen Sie damit, dass für jeden $\mathbb{Z}$-Modul Z und für jede bilineare Abbildung $\varphi : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to Z$ gilt $\varphi(d \mod m, 1 \mod n) = 0_Z$.

Abgabetermin: Donnerstag, 09.01.2020 vor der Vorlesung