

Lineare Algebra 2: Multilineare Algebra - Übungsblatt 10 -

Aufgabe 21.

Betrachten Sie $\mathbb{R}^2$ als $\mathbb{Z}$ -Modul. Es seien zwei Elemente $m, n \in \mathbb{R}^2$ gegeben, und es sei

$$N := \text{span}_{\mathbb{Z}}(\{m, n\}) = \{am + bn \in \mathbb{R}^2 : a, b \in \mathbb{Z}\}$$

der von m und n in $\mathbb{R}^2$ erzeugte $\mathbb{Z}$ -Untermodul. Sei $\varphi : \mathbb{R} \times N \rightarrow \mathbb{R}^2$ die bilineare Abbildung $\varphi(r, t) := r \cdot t$, für $r \in \mathbb{R}$ und $n \in N$. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (1) m und n sind linear unabhängig über $\mathbb{R}$;
- (2) die induzierte Abbildung $\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} N \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist ein Isomorphismus von $\mathbb{Z}$ -Moduln.

Aufgabe 22.

Betrachten Sie den reellen Vektorraum $M := \mathbb{R}^2$ mit der Standardbasis e_1, e_2 . Es sei $\tau : M \times M \rightarrow M \otimes_{\mathbb{R}} M$ die Tensorabbildung. Es sei

$$\begin{aligned} \alpha : M &\rightarrow M \\ (x_1, x_2) &\mapsto (2x_1 + 5x_2, x_1 + 3x_2) \end{aligned}$$

- a) Zeigen Sie, dass α ein Isomorphismus ist.
- b) Bestimmen Sie bezüglich einer geeigneten Basis von $\otimes^2 M$ die darstellende Matrix A der linearen Abbildung $\alpha \otimes \alpha^{-1} : M \otimes_{\mathbb{R}} M \rightarrow M \otimes_{\mathbb{R}} M$.

Betrachten Sie nun die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : M \times M &\rightarrow M \\ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &\mapsto (x_1 y_2, x_2 y_1) \end{aligned}$$

- c) Zeigen Sie, dass φ eine bilineare Abbildung ist.
- d) Bestimmen Sie bezüglich einer geeigneten Basis von $M \otimes_{\mathbb{R}} M$ die darstellende Matrix $A_{\tilde{\varphi}}$ der zu φ gehörigen linearen Abbildung $\tilde{\varphi} : M \otimes_{\mathbb{R}} M \rightarrow M$.
- e) Bestimmen Sie $\ker(\tilde{\varphi})$.
- f) Bestimmen Sie alle Elemente $(x, y) \in M \times M$ mit $\pi(x, y) \in \ker(\tilde{\varphi})$.

Abgabetermin: Donnerstag, 16.01.2020 vor der Vorlesung