

Lineare Algebra 2: Multilineare Algebra - Übungsblatt 12 -

Aufgabe 25.

Betrachten Sie den reellen Vektorraum $V := \mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis e_1, e_2, e_3 . Es sei $\varphi : V \rightarrow V$ ein Vektorraumhomomorphismus über $\mathbb{R}$ mit der darstellenden Matrix $A_\varphi = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} \in \text{Mat}(3, 3, \mathbb{R})$. Berechnen Sie die darstellende Matrix von

$$\wedge^2 \varphi : \wedge^2 V \rightarrow \wedge^2 V$$

bezüglich der Basis $(e_i \wedge e_j)_{1 \leq i < j \leq 3}$.

Aufgabe 26.

Betrachten Sie $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{R}$ -Modul, mit dem Standard-Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ und orthonormalen Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$. Sei σ die (bekanntermaßen) alternierende bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ ((u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3)) &\mapsto (u_2 v_3 - u_3 v_2, -u_1 v_3 + u_3 v_1, u_1 v_2 - u_2 v_1). \end{aligned}$$

Für eine alternierende 2-lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha : (\mathbb{R}^3)^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v, w) &\mapsto \langle u, \alpha(v, w) \rangle \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

- a) Für $\alpha = \sigma$ ist die Abbildung φ_σ 3-linear und alternierend.
- b) Ist φ_α eine alternierende 3-lineare Abbildung mit $\langle e_1, \alpha(e_2, e_3) \rangle = 1$, dann gilt $\alpha = \sigma$.

Abgabetermin: Donnerstag, 30.01.2020 vor der Vorlesung