Eberhard Karls Universität Tübingen Wintersemester 2019/20

Fachbereich Mathematik

PD Dr. Jörg Zintl

Lineare Algebra 2: Multilineare Algebra
- Übungsblatt 13 -

Aufgabe 27.
Sei M ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeigen Sie: Jede bilineare Abbildung $\varphi : M \times M \to \mathbb{R}$ lässt sich eindeutig darstellen als

$$\varphi \; = \; \varphi_+ + \varphi_-$$

mit $\varphi_+ \in \mathrm{Sym}^2(M;\mathbb{R})$ und $\varphi_- \in \mathrm{Alt}^2(M;\mathbb{R})$.

Aufgabe 28.
Betrachten Sie $\mathbb{R}^2$ als $\mathbb{R}$-Modul, mit dem Standard-Skalarprodukt $\langle \, , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und Standardbasis $\{e_1, e_2\}$. Die Abbildung $\varphi : (\mathbb{R}^2)^3 \to \mathbb{R}^2$ sei für $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\varphi(u, v, w) \; := \; \langle u, v\rangle w \; + \langle v, w\rangle u \; + \langle w, u\rangle v.$$

a) Zeigen Sie, dass φ eine symmetrische 3-lineare Abbildung ist.

b) Bestimmen Sie bezüglich einer geeigneten Basis die darstellende Matrix der zugehörigen $\mathbb{R}$-linearen Abbildung $\check{\varphi} : S^3\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

c) Betrachten Sie nun $\mathbb{R}^2$ als $\mathbb{Z}$-Modul und φ als $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphismus. Für eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei $\varphi_n := \varphi | N \times N \times N$ die Einschränkung von φ bezüglich des $\mathbb{Z}$-Untermoduls

$$N := \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\{e_1, n \cdot e_2\}.$$

Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $\varphi_n(N \times N \times N) = N$.

Keine Abgabe!