Eberhard Karls Universität Tübingen Wintersemester 2019/20
Fachbereich Mathematik 6. Februar 2020
PD Dr. Jörg Zintl

Lineare Algebra 2: Abschlusstest

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Aufgabe 1. (10 Punkte)
Sei $(G, \cdot)$ eine abelsche Gruppe. Sei $g \in G$ und $p := \mathrm{ord}(g)$ eine Primzahl.

a) Zeigen Sie: Für jede Untergruppe $(H, \cdot) \leq (G, \cdot)$ gilt entweder $H \supseteq \langle g \rangle$ oder $H \cap \langle g \rangle = \{1\}$.

b) Sei nun $(H, \cdot) \leq (G, \cdot)$ mit $g \notin H$. Sei $\pi : G \to G/\langle g \rangle$ die kanonische Quotientenabbildung. Zeigen Sie: $(\pi(H), \cdot)$ ist eine Untergruppe von $(G/\langle g \rangle, \cdot)$ und isomorph zu $(H, \cdot)$.

c) Sei $\mathrm{ord}(G) = p_1 \cdot p_2$ mit verschiedenen Primzahlen p_1 und p_2. Zeigen Sie: Für jedes $i = 1, 2$ gibt es ein $g_i \in G$ mit $\mathrm{ord}(g_i) = p_i$.

Aufgabe 2. (10 Punkte)
Sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins. Seien $n, m, \ell \in \mathbb{N}_{>0}$. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Jeder Körper ist ein Hauptidealring.

b) Sei N die Menge der Nullteiler in R, und R^* die Menge der Einheiten. Dann gilt $N = R \setminus R^*$.

c) Sei $(I, +, \cdot)$ ein Unterring von $(R, +, \cdot)$, und sei $(J, +, \cdot)$ ein Unterring von $(I, +, \cdot)$ derart, dass $I \subseteq R$ ein Ideal ist und $J \subseteq I$ ein Hauptideal ist. Dann ist auch $J \subseteq R$ ein Ideal.

d) Sei $p \in R$ prim. Sei $a \in R$ mit $\langle a^2 \rangle \subseteq \langle p \rangle$. Dann gilt $\langle a \rangle \subseteq \langle p \rangle$.

e) Jede alternierende bilineare Abbildung von $\mathbb{Z}$-Moduln $\varphi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ ist konstant.

Aufgabe 3. (10 Punkte)
a) Sei $\mathbb{Z}_5 := \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Zeigen Sie: Für die Einheiten im Polynomring gilt $(\mathbb{Z}_5[X])^* = \mathbb{Z}_5^*$.

b) Bestimmen Sie $\mathrm{ggT}(f, g)$ für die folgenden Polynome in $\mathbb{Z}_5[X]$:
$$f := X^4 + X^2 + \overline{3} \quad \text{und} \quad g := X^5 + \overline{2}X^3 + \overline{3}X^2 + \overline{1}.$$

c) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente von $\mathrm{ggT}(f, g)$.

Aufgabe 4. (12 Punkte)
Es bezeichne (CR) die Kategorie der kommutativen Ringe und Ringhomomorphismen. Für einen kommutativen Ring $(R, +, \cdot)$ definiert man die Menge der *nilpotenten Elemente* durch
$$N(R) := \{a \in R : \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } a^n = 0\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $N(R) \subseteq R$ ein Ideal ist.

b) Zeigen Sie, dass dadurch ein Funktor $\underline{N} : (\mathrm{CR}) \to (\mathrm{CR})$ definiert wird.

Aufgabe 5. (8 Punkte)
Betrachten Sie $\mathbb{R}^3$ als freien $\mathbb{R}$-Modul mit Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$. Sei
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \otimes^2 \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \mapsto & u \otimes v - v \otimes u \end{array}$$

a) Zeigen Sie, dass φ eine alternierende Abbildung ist, und bestimmen Sie die darstellende Matrix $A_{\hat{\varphi}}$ der zu φ gehörigen linearen Abbildung $\hat{\varphi} : \wedge^2 \mathbb{R}^3 \to \otimes^2 \mathbb{R}^3$ bezüglich geeigneter Basen.

b) Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Alt}^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}))$.

Viel Erfolg!