

Lineare Algebra 2: Multilineare Algebra

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, und seien $a : A \rightarrow C$ und $b : B \rightarrow C$ Morphismen in $\mathcal{C}$. Sei (P, p_a, p_b) ein Produkt von a und b . Zeigen Sie: Ist a ein Monomorphismus, dann ist auch p_b ein Monomorphismus.

Aufgabe 2. Für eine Menge X bezeichne $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X , das heißt, die Menge aller Teilmengen von X .

Konstruieren Sie damit einen treuen (kovarianten) Funktor $\mathcal{P} : (\text{Set}) \rightarrow (\text{Set})$.

Aufgabe 3. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, und sei $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Die *relative Kategorie* $\mathcal{C}/S$ ist definiert durch

$$\text{Ob}(\mathcal{C}/S) := \{a : A \rightarrow S \text{ mit } A \in \text{Ob}(\mathcal{C})\}$$

und für Objekte $a : A \rightarrow S$ und $b : B \rightarrow S$

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}/S}(a, b) := \{f : A \rightarrow B \text{ mit } a = b \circ f\}$$

Die Kategorie $\mathcal{C}_{rel}$ enthalte als Objekte alle relativen Kategorien $\mathcal{C}/S$ mit $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, und als Morphismen alle (kovarianten) Funktoren zwischen den relativen Kategorien.

a) Bestimmen Sie ein terminales Objekt in $\mathcal{C}/S$.

b) Konstruieren Sie einen (kovarianten) Funktor $\mathbf{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{rel}$.

Aufgabe 4. Sei $\mathcal{C} := (K\text{-VR}_{endlich})$ die Kategorie der endlichdimensionalen Vektorräume über einem festen Körper K , zusammen mit den zugehörigen linearen Abbildungen als Morphismen. Sei $\mathbf{F}$ der kontravariante Funktor

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F} : (K\text{-VR}_{endlich}) & \rightarrow & (K\text{-VR}_{endlich}) \\ V & \mapsto & V^* := \text{Hom}_K(V, K) \\ \alpha : V \rightarrow W & \mapsto & \alpha^* : W^* \rightarrow V^* \end{array}$$

wobei für eine K -lineare Abbildung $f \in W^*$ gilt: $\alpha^*(f) = f \circ \alpha \in V^*$.

a) Zeigen Sie, dass die Verknüpfung $\mathbf{B} := \mathbf{F} \circ \mathbf{F}$ einen (kovarianten) Funktor definiert.

b) Konstruieren Sie eine natürliche Äquivalenz $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathbf{B}$ von Funktoren.

Abgabetermin: Mittwoch, 07.11.2018 bis 10 Uhr, Übungsleiter-Postkästen in Bau C