

Lineare Algebra 2: Multilineare Algebra

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit einem Nullobjekt $\mathcal{O} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Seien $f : A \rightarrow B$ und $k : K \rightarrow A$ Morphismen in $\mathcal{C}$. Bestimmen Sie Objekte $P, T \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ und Morphismen $p : P \rightarrow A$, $q : P \rightarrow T$ und $t : T \rightarrow B$ derart, dass die folgenden beiden Aussagen zueinander äquivalent sind:

- (1) k ist ein Kern von f ;
- (2) (P, p, q) ist ein Produkt von f und t .

Aufgabe 2. Sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring, und $(M, +_M, \cdot_M)$ ein R -Modul. Für eine Menge X bezeichne $\text{Abb}(X, M)$ den R -Modul der Abbildungen von X in M . Zeigen Sie, dass durch die Zuordnung $X \mapsto \text{Abb}(X, M)$ ein kontravarianter Funktor

$$\mathbf{Abb}(\bullet, M) : (\text{Set}) \rightarrow (R\text{-Mod})$$

induziert wird.

Aufgabe 3. Konstruieren Sie einen Isomorphismus von Kategorien

$$\mathbf{F} : (\mathbb{Z}\text{-Mod}) \rightarrow (\text{Ab}).$$

Aufgabe 4. Sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring, und $(M, +_M, \cdot_M)$ ein R -Modul. Sei

$$T(M) := \{m \in M : \exists r \in R \text{ mit } r \neq 0 \text{ und } r \cdot_M m = 0_M\}.$$

- a) Zeigen Sie: Falls $(R, +, \cdot)$ ein Integritätsring ist, dann ist $T(M) \subseteq M$ ein Untermodul.
- b) Gilt die Aussage von a) auch dann, wenn $(R, +, \cdot)$ kein Integritätsring ist?
- c) Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, und $(M, +_M, \cdot_M)$ ein Untermodul von $(K, +, \cdot)$. Zeigen Sie, dass die Gleichheit $T(M) = \{0\}$ gilt.

Abgabetermin: Mittwoch, 21.11.2018 bis 10 Uhr, Übungsleiter-Postkästen in Bau C