

Lineare Algebra 2: Multilineare Algebra

Übungsblatt 4

Aufgabe 1+2. Entscheiden Sie, welche der folgenden Moduln endlich erzeugt und/oder frei sind:

- a) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ als $\mathbb{Z}$ -Modul;
- b) $(\text{Mat}(2, 2, \mathbb{R}), +, \cdot)$ als $D_2(\mathbb{R})$ -Modul;
- c) $(U_n, \cdot, \lambda)$ als $\mathbb{Z}$ -Modul, wobei man für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ definiert

$$U_n := \{e^{2\pi i k/n} \in \mathbb{C} : k = 0, \dots, n-1\}$$

und $\lambda(a, z) := z^a$ für $a \in \mathbb{Z}$, $z \in U_n$;

- d) $(\text{Abb}(X, \mathbb{R}), +, \cdot)$ als $\mathbb{R}$ -Modul, für eine endliche Menge X .

Aufgabe 3. Sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins. Seien $L_1, \dots, L_\ell, M_1, \dots, M_p$ und N, N' jeweils R -Moduln. Beweisen oder widerlegen Sie:

- a) Ist $\varphi : M_1 \times \dots \times M_p \rightarrow N$ eine p -lineare Abbildung und $\alpha : N \rightarrow N'$ eine lineare Abbildung, dann ist $\alpha \circ \varphi$ wieder p -linear.
- b) Ist $\beta : L_1 \times \dots \times L_\ell \rightarrow M_1 \times \dots \times M_p$ eine R -lineare Abbildung, und $\varphi : M_1 \times \dots \times M_p \rightarrow N$ eine p -lineare Abbildung, dann ist $\varphi \circ \beta$ auch ℓ -linear.
- c) Sind $\varphi, \psi : M_1 \times \dots \times M_p \rightarrow N$ zwei p -lineare Abbildungen, dann ist die punktweise definierte Abbildung $\varphi + \psi$ wieder p -linear.

Aufgabe 4. Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, und sei $M := \text{Mat}(n, n, K)$ der K -Modul der quadratischen Matrizen der Größe $n \geq 2$. Zeigen Sie: Die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \quad M \times M &\rightarrow M \\ (A, B) &\mapsto [A, B] := AB - BA \end{aligned}$$

ist bilinear, und es gilt $\text{span}(\varphi(M \times M)) \neq M$.

Abgabetermin: Mittwoch, 05.12.2018 bis 10 Uhr, Übungsleiter-Postkästen in Bau C