Eberhard Karls Universität Tübingen Wintersemester 2018/19

Fachbereich Mathematik

PD Dr. Jörg Zintl

Lineare Algebra 2: Multilineare Algebra

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, und sei $(N, \cdot)$ ein Normalteiler darin. Es bezeichne $\pi : G \to G/N$ die kanonische Quotientenabbildung, $j : N \to G$ den Inklusionshomomorphismus, $t : N \to \{1\}$ die konstante Abbildung auf die triviale Gruppe $(\{1\}, \cdot)$ und $i : 1 \to G/H$ die Inklusion der trivialen Gruppe. Zeigen Sie: $(G/H, \pi, i)$ ist ein Koprodukt von j und t in der Kategorie der Gruppen (Gp).

Aufgabe 2. Sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins. Sei $(M, +, \cdot)$ ein R-Modul, und sei $(N, +, \cdot)$ ein Untermodul davon. Sei $(M/N, +)$ die Quotientengruppe. Die zu einem Element $m \in M$ gehörige Äquivalenzklasse werde mit $[m] := m + N \in M/N$ bezeichnet. Zeigen Sie:

a) Die Abbildung $\circ : R \times M/N \to M/N$ mit $r \circ [m] := [r \cdot m]$ ist wohldefiniert, d.h. sie hängt nicht von der Wahl des Repräsentanten m von $[m]$ ab.

b) Das Tripel $(M/N, +, \circ)$ ist ein R-Modul.

c) Die Abbildung $\pi : M \to M/N$ mit $\pi(m) := [m]$ ist ein R-Modulhomomorphismus.

Aufgabe 3. Sei $(R, +, \cdot)$ ein Integritätsring, und $(M, +, \cdot)$ ein R-Modul. Betrachten Sie den Untermodul

$$T(M) := \{m \in M : \exists\, r \in R \text{ mit } r \neq 0 \text{ und } r \cdot m = 0_M\}$$

aus Aufgabe 4, Blatt 3.

a) Zeigen Sie: $T(M/T(M)) = \{0\}$.

b) Zeigen Sie: Ist $(M, +, \cdot)$ ein freier R-Modul, dann ist $T(M) = \{0\}$.

c) Gilt auch die Umkehrung von **b)**?

d) Bestimmen Sie $T(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, wobei $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ als $\mathbb{Z}$-Modul aufgefasst werde.

Aufgabe 4. Sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins, und $(M, +, \cdot)$ ein R-Modul. Sei $p \in \mathbb{N}_{>0}$, und seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_p : M \to R$ Homomorphismen von R-Moduln.

a) Zeigen Sie: Die Abbildung $\alpha : M^p \to R$ mit $\alpha(m_1, \ldots, m_p) := \alpha_1(m_1) \cdot \ldots \cdot \alpha_p(m_p)$ ist p-linear.

b) Zeigen Sie anhand eines Beispiels im Fall $p = 2$, dass nicht jede p-lineare Abbildung $\varphi : M^p \to R$ von dieser Form ist.

c) Konstruieren Sie ein Beispiel einer nicht-konstanten 3-linearen Abbildung von $\mathbb{R}$-Moduln $\varphi : \mathbb{R}^7 \times \mathbb{R}^7 \times \mathbb{R}^{13} \to \mathbb{R}^{13}$.

Abgabetermin: Mittwoch, 19.12.2018 bis 10 Uhr, Übungsleiter-Postkästen in Bau C