

Lineare Algebra 2: Multilineare Algebra

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins. Sei $R[X]$ der R -Modul der Polynome mit Koeffizienten in R und Variable X , sowie $R[X, Y]$ der R -Modul der Polynome über R in zwei Variablen X und Y . Beweisen Sie die Existenz eines Isomorphismus

$$R[X] \otimes_R R[X] \cong R[X, Y].$$

Aufgabe 2. Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Seien M und N zwei K -Vektorräume, und seien $0 \neq m, m' \in M$ und $0 \neq n, n' \in N$. Zeigen Sie: In $M \otimes_K N$ gilt $m \otimes n = m' \otimes n'$ genau dann wenn es $\mu, \nu \in K$ gibt mit $\mu \cdot \nu = 1$ und $m' = \mu m$ und $n' = \nu n$.

Gilt die Aussage auch dann, wenn man die Voraussetzung “Körper” durch “Ring” ersetzt?

Aufgabe 3. Sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins, und sei $I \subseteq R$ ein Untermodul. Sei M ein R -Modul, und sei IM der von der Menge $\{im \in M : i \in I, m \in M\} \subseteq M$ erzeugte Untermodul. Konstruieren Sie einen Isomorphismus von R -Moduln

$$R/I \otimes_R M \cong M/IM.$$

Aufgabe 4. a) Zwei lineare Abbildungen $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $\beta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ von $\mathbb{R}$ -Vektorräumen seien bezüglich der Standardbasen gegeben durch die Matrizen

$$M_\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M_\beta := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die darstellende Matrix von $\alpha \otimes \beta$ bezüglich einer geeigneten Basis.

b) Betrachten Sie $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$ -Modul. Zeigen Sie, dass die Multiplikation zweier komplexer Zahlen eine bilineare Abbildung von $\mathbb{R}$ -Moduln ist, und bestimmen Sie bezüglich einer geeigneten Basis die darstellende Matrix der zugehörigen $\mathbb{R}$ -linearen Abbildung von $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$.

Abgabetermin: Mittwoch, 16.01.2019 bis 10 Uhr, Übungsleiter-Postkästen in Bau C