

Lineare Algebra 2: Multilineare Algebra

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. a) Zeigen Sie, dass ein Untermodul eines freien R -Moduls nicht notwendigerweise frei sein muss. (Hinweis: Benutzen Sie z.B. $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, sowie $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.)

b) Zeigen Sie: Sind M, N zwei R -Moduln und $U \subset M$ ein Untermodul, dann ist im Allgemeinen $U \otimes_R N$ kein Untermodul von $M \otimes_R N$. (Hinweis: Benutzen Sie z.B. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}_2$.)

c) Zeigen Sie: Sind M, N zwei freie R -Moduln und $U \subseteq M$ ein Untermodul, dann ist $U \otimes_R N$ isomorph zu einem Untermodul von $M \otimes_R N$.

Aufgabe 2. Seien $j : R \rightarrow S$ und $k : S \rightarrow T$ Homomorphismen von Ringen mit Eins. Insbesondere ist T ein R -Modul via $k \circ j$. Sei M ein R -Modul. Konstruieren Sie für die entsprechenden Erweiterungen einen Isomorphismus von T -Moduln

$$M_T \cong (M_S)_T.$$

Aufgabe 3. Sei $M := \mathbb{R}^3$. Betrachten Sie den $\mathbb{R}$ -Modul $(M, +, \cdot)$ mit den üblichen Verknüpfungen, sowie die Abbildung

$$\begin{aligned} \sigma : \quad M \times M &\rightarrow M \\ ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) &\mapsto (x_2y_3 - x_3y_2, -x_1y_3 + x_3y_1, x_1y_2 - x_2y_1) \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass $(M, +, \cdot, \sigma)$ eine $\mathbb{R}$ -Algebra ist.

b) Untersuchen Sie, welche der folgenden drei Eigenschaften die $\mathbb{R}$ -Algebra M erfüllt: Kommutativ, assoziativ, mit Einselement.

Aufgabe 4. Sei $M := \mathbb{R}^3$. Betrachten Sie die Determinante als Abbildung $\det : M^3 \rightarrow \mathbb{R}$ zwischen $\mathbb{R}$ -Moduln.

Zeigen Sie, dass dies eine 3-lineare Abbildung ist, und bestimmen Sie für die zugehörige lineare Abbildung auf dem Tensorprodukt die darstellende Matrix bezüglich einer geeigneten Basis.

Abgabetermin: Mittwoch, 30.01.2019 bis 10 Uhr, Übungsleiter-Postkästen in Bau C