**Eberhard Karls Universität Tübingen** Wintersemester 2018/19
**Fachbereich Mathematik**
PD Dr. Jörg Zintl

# Lineare Algebra 2: Multilineare Algebra
## Übungsblatt 8

**Aufgabe 1.** Betrachten Sie den reellen Vektorraum $M := \mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis $e_1, e_2, e_3$. Es sei $\tau : M \times M \to \otimes^2 M$ die Tensorabbildung. Es sei

$$\begin{array}{lccc} \varphi : & M \times M & \to & M \\ & ((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) & \mapsto & (x_2y_3 - x_3y_2, -x_1y_3 + x_3y_1, x_1y_2 - x_2y_1) \end{array}$$

**a)** Zeigen Sie, dass $\varphi$ eine alternierende Abbildung ist.
**b)** Bestimmen Sie bezüglich einer geeigneten Basis von $\wedge^2 M$ die darstellende Matrix $A_{\tilde{\varphi}}$ der zu $\varphi$ gehörigen linearen Abbildung $\tilde{\varphi} : \wedge^2 M \to M$.
**c)** Bestimmen Sie $\ker(\pi)$ der kanonischen Quotientenabbildung $\pi : \otimes^2 M \to \wedge^2 M$.

**Aufgabe 2.** Sei $V$ ein Vektorraum über dem reellen Körper $\mathbb{R}$. Für eine Permutation $\sigma \in \Sigma_3$ werde die induzierte lineare Abbildung auf den Tensorpotenzen ebenfalls mit $\sigma : \otimes^3 V \to \otimes^3 V$ bezeichnet. Es seien $\tau : V^3 \to \otimes^3 V$ und $\pi : \otimes^3 V \to \wedge^3 V$ die kanonischen Abbildungen. Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\begin{array}{lccc} \psi : & \otimes^3 V & \to & \otimes^3 V \\ & t & \mapsto & \frac{1}{3!} \sum\limits_{\sigma \in \Sigma_3} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \sigma(t). \end{array}$$

**a)** Zeigen Sie: $\psi \circ \tau$ ist eine alternierende Abbildung.
**b)** Bestimmen Sie für den Fall $V = \mathbb{R}^3$ den Rang von $\psi$.
**c)** Sei $\alpha : \wedge^3 V \to \otimes^3 V$ die durch $\psi \circ \tau$ induzierte Abbildung. Bestimmen Sie allgemein die Abbildung $\beta := \pi \circ \alpha : \wedge^3 V \to \wedge^3 V$.
**d)** Zeigen Sie: $\psi^2 = \psi$.

**Aufgabe 3.** Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, und seien $U$ und $V$ endlichdimensionale $K$-Vektoräume. Sei $\varphi : U \to V$ eine $K$-lineare Abbildung vom Rang $r \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: $2^r$ ist der Rang der durch die Bildung direkter Summen zusammengesetzten $K$-linearen Abbildung

$$\bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \wedge^p \varphi : \quad \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \wedge^p U \longrightarrow \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \wedge^p V.$$

**Aufgabe 4.** Seien $M$ und $N$ zwei $\mathbb{Q}$-Moduln. Konstruieren Sie einen Isomorphismus:

$$\psi : \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(S^2 M, N) \to \{\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(\otimes^2 M, N) : \forall m, n \in M \text{ gilt } m \otimes n - n \otimes m \in \ker(\varphi)\}.$$

**Abgabetermin:** Keine Abgabe, nur zur Eigen-Übung!