Ausgewählte Kapitel der Differentialgeometrie

Aufgabe 1. Besprechen Sie die Topologie von kompakten, orientierten Flächen.

Aufgabe 2. Betrachten Sie den euklidischen $\mathbb{R}^4$ mit den Koordinaten $x_1, .., x_4$ und der Orientierung $dx_1 \wedge .. \wedge dx_4 > 0$. Betrachten Sie unitäre Zusammenhänge

$$\tilde{\nabla} = d + A$$

auf dem trivialen hermitischem Bündel $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^4$, wobei $A \in \Omega^1(M, \mathfrak{su}(2))$.

Der Zusammenhang ∇ löst die Yang-Mills Self-Duality Gleichung, falls

$$F^{\tilde{\nabla}} = *F^{\tilde{\nabla}}$$

gilt, wobei $*$ der Hodge-$*$ auf $\mathbb{R}^4$ ist. Berechnen Sie diese Gleichung in Koordinaten.

Betrachten Sie nun den Fall, dass für $A = A_1dx_1 + .. + A_4dx_4$ gilt, dass $A_1, .., A_4$ nur von x_1, x_2 abhängen. Berechnen Sie nun noch einmal die Selfduality Gleichungen als Gleichungen auf dem Raum $\mathbb{R}^2$: Zeigen Sie, dass mit $\nabla = d + A_1dx_1 + A_2dx_2$ und $\Phi = \frac{1}{2}(A_3 - iA_4)(dx_1 + idx_2)$, $\Phi^* = \frac{1}{2}(A_3 - iA_4)^*(dx_1 - idx_2)$ die Selfduality Gleichungen äquivalent sind zu:

$$F^{\nabla} = -[\Phi, \Phi^*]$$

und

$$d^{\nabla}\Phi = \bar{\partial}^{\nabla}\Phi = 0.$$

Besprechen Sie die konforme Invarianz von diesen Gleichungen.