Ausgewählte Kapitel der Differentialgeometrie

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass ein komplexes Linienbündel L über einer Riemannschen Fläche Σ genau dann trivial ist wenn

$$deg(L) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Sigma F^\nabla = 0$$

für einen und somit für alle komplexen Zusammenhänge ∇ (mit Krümmung $F^\nabla \in \Omega^2(\Sigma, \mathbb{C})$) auf L gilt.

Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass es unter der Annahme $deg(L) = 0$ immer einen flachen Zusammenhang gibt. Zeigen Sie dann, dass es sogar einen solchen flachen Zusammenhang gibt, so dass der Paralleltransport längs aller Kurven trivial ist. Folgern Sie daraus die Aussage.

Aufgabe 2. Zeigen Sie mit allen Details, dass der Modulraum Jac aller holomorphen Strukturen auf einem Linienbündel vom Grad 0 über einer kompakten Riemannschen Fläche Σ modulo Umeichung isomorph zu

$$\overline{H^0(\Sigma, K)}/\Lambda$$

ist, wobei

$$\Lambda = \{\bar\omega \in \overline{H^0(\Sigma, K)} \mid \int_\gamma -\omega + \bar\omega \in 2\pi i\mathbb{Z} \text{ für alle geschlossenen Kurven } \gamma\}$$

ist.