Ausgewählte Kapitel der Differentialgeometrie

Aufgabe 1. Berechnen Sie die komplexen Strukturen I, J, K auf dem Modulraum $\mathcal{M}$ aller flachen $\mathbb{C}^*$-Zusammenhlange über einer kompakten Riemannschen Fläche bezüglich der Identifikation des Tangentialraum $T_p\mathcal{M}$ mit den komplexwertigen harmonischen 1-Formen.

Zeigen Sie, dass die Riemannsche Metrik auf $\mathcal{M}$ definiert durch

$$g(\alpha, \beta) = Re(\int_\Sigma \alpha \wedge \star_{Hodge}\bar{\alpha})$$

für komplexwertigen harmonischen 1-Formen α, β sowohl für I als auch für J und K eine Kählermetrik liefert, und berechnen Sie die symplektischen Strukturen.

Schreiben Sie die natürliche holomorphe symplektische Form auf $T*Jac = (\mathcal{M}, I)$ in den symplektischen Formen, welche zu I, J, K gehören.

Aufgabe 2. Sei Σ eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g. Zeigen Sie, dass es genau 2^{2g} holomorphe Spinbündel über Σ gibt.

Aufgabe 3. Betrachten Sie eine Riemannschen Fläche vom Geschlecht 1 zusammen mit einer kompatibelen flachen Metrik g. Berechnen Sie die Monodromien der flachen unitären Zusammenhänge auf den vier Spinbündeln, welche dem (flachen) Levi Civita Zusammenhang von g entsprechen.