Ausgewählte Kapitel der Differentialgeometrie

Aufgabe 1. Beweisen Sie Teil iv) und Teil v) vom Satz aus der Vorlesung (Proposition 3.3 in Hitchin).

Aufgabe 2. Beweisen Sie die Existenz der Abbildung $\mathcal{L}\colon P \to Pic_d(\Sigma)$ aus Teil i) vom Satz aus der Vorlesung (Proposition 3.3 in Hitchin). Dabei ist $Pic_d(\Sigma)$ der Modulraum der holomorphen Bündel vom Grad d ¨ber Σ (dies ist eine affine Version von $Jac(\Sigma)$) und d der minimale Grad der Eigenlinienbündel der Familie $t\Phi + \tilde{\Phi}$ von Higgsfeldern, deren Determinante jeweils das Quadrat einer holomorphen 1-Form auf Σ ist.

Tipp: Sei topologisch $V = L \oplus L^*$, und bezüglich dieser Zerlegung sei die holomorphe Struktur $\bar{\partial}^V = \begin{pmatrix} \bar{\partial}^L & \gamma \\ 0 & \bar{\partial}^{L^*} \end{pmatrix}$ und das Higgsfeld $\hat{\Phi} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ mit Determinante $\det(\hat{\Phi}) = -\omega^2$. Zeigen Sie, dass die Eigenlinie $\hat{L}$ von $\hat{\Phi}$ bezüglich dem Eigenwert ω folgende Gleichung erfüllt:

$$\hat{L}^* \otimes L^* = L(p_1 + ... + p_k)$$

wobei allgemein $L(q_1 + .. + q_l)$ das eindeutig bestimmte (bis auf Isomorphie) holomorphe Bündel sei, welches einen holomorphen Schnitt mit Nullstellen an $q_1, .., q_l$ hat, und die Punkte $p_1, .., p_k$ die Nullstellen von $a - \omega$ sind, welche keine Nullstellen von b sind (Vielfachheiten bachten). Benutzen Sie dazu das $\wedge$-Produkt.

Aufgabe 3 (Grothendieck)**.** Klassifizieren Sie die holomorphen Vektorbündel vom Rang 2 mit trivialem Determinantenbündel über $\mathbb{CP}^1$.

Tipp: Zeigen Sie die Existenz eines holomorphen Unterlinienbündels mit grösstmöglichem Grad. Beweisen Sie die Existenz eines holomorphen Komplements.

Aufgabe 4 (Atiyah)**.** Klassifizieren Sie die holomorphen Vektorbündel vom Rang 2 mit trivialem Determinantenbündel über einer kompakten Riemannschen Fläche vom Geschlecht 1.

Tipp: Zeigen Sie die Existenz eines holomorphen Unterlinienbündels L mit grösstmöglichem Grad (≥ 0). Falls $deg(L) > 0$ oder $L^2 \neq \underline{C}$ beweisen Sie die Existenz eines holomorphen Komplements. Welche Möglichkeiten existieren für Spinbündel L?