Analysis III : Übungsblatt 4

Dr. Sebastian Heller 3. November 2011

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 15. November vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Zeigen Sie (durch Angabe eines Gegenbeispiels):

i) Der Satz von der monotonen Konvergenz gilt im Allgemeinen nicht, wenn man keine monotone Funktionenfolge nimmt.
ii) Der Satz von der dominierten Konvergenz gilt im Allgemeinen nicht, wenn man nicht die Existenz einer dominierenden Funktion fordert.

Aufgabe 2. Finden Sie eine Folge positiver Lebesgue–integrierbarer Funktionen auf $[0, 1]$, die nirgenwo Punktweise konvergiert, deren Integrale aber gegen 0 konvergieren.

Aufgabe 3. Zeigen Sie:

i) Ist $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ eine integrierbare Funktion, so gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \delta$ gilt $\int_A |f| d\mu < \epsilon$. (Tip: Zeigen Sie, daß $\int_{F_n} |f| d\mu$ mit $F_n = \{x \mid |f(x)| \geq n\}$ gegen Null konvergiert für $n \to \infty$.)
ii) Für $\Omega = \mathbb{R}$ mit Lebesgue–Maß definiert $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f\, d\mu$ eine gleichmäßig stetige Funktion.

Aufgabe 4. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lebesgue–integrierbare Funktion. Dann gilt fast überall (d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ ausserhalb einer Nullmenge)

$$\lim_{n\to\infty} f(x + n) = \lim_{n\to\infty} f(x - n) = 0.$$

(Tip: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können Sie $x \in [0, 1]$ und $f \geq 0$ annehmen.)