Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen WS 2012

Einführung in Mannigfaltigkeiten : Übungsblatt 1

Wjatscheslaw Kewlin 18. Oktober 2012

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 25. Oktober vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Erklären Sie, wie man—analog zu S^2 in der Vorlesung—den Einheitskreis $S^1 = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ mittels stereographischer Projektionen zu einer Mannigfaltigkeit machen kann. (Sie können auch den Fall S^n diskutieren, falls Ihnen S^1 zu langweilig ist.)

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß es auf $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ eine eindeutige Mannigfaltigkeitsstruktur gibt, bezüglich derer die Projektion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ ein lokaler Diffeomorphismus wird. Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ diffeomorph zu S^1 ist.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß die in der Vorlesung angegebene differenzierbare Struktur auf $\mathbb{KP}^n$ für $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ in der Tat eine Topologie induziert, welche Hausdorff ist und das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, daß die beiden Mannigfaltigkeiten S^2 und $\mathbb{CP}^1$ diffeomorph sind. Erkären Sie, wie man $\mathbb{CP}^1$ als Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ auffassen kann.