Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen WS 2012

# Einführung in Mannigfaltigkeiten : Übungsblatt 2

Wjatscheslaw Kewlin 30. Oktober 2012

**Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 8. November vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.**

**Aufgabe 1.** Sei $A \in GL(n+1, \mathbb{K})$ eine invertierbare Matrix über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Zeigen Sie, daß $f[v] = [Av]$ einen Diffeomorphismus $f\colon \mathbb{KP}^n \to \mathbb{KP}^n$ definiert.

**Aufgabe 2.** Sei $TM = \dot\bigcup_{p\in M} T_pM$ die disjunkte Vereinigung aller Tangentialräume einer Mannigfaltigkeit $M$. Zeigen Sie, daß jeder Atlas $\mathcal{A}$ von $M$ wie folgt einen Atlas auf $TM$ definiert: für $(U, \varphi = (x_1, ..., x_n)) \in \mathcal{A}$, definiere

$$\Phi\colon TM_{|U} \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \quad \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \to (\varphi(p), v_1, ..., v_n),$$

wobei $TM_{|U} = \dot\bigcup_{p\in U} T_pM$ und $\frac{\partial}{\partial x_1}(p)$, ...., $\frac{\partial}{\partial x_n}(p)$ die durch $(U, \varphi)$ definierte Gaussbasis von $T_pM$ bezeichnet. Zeigen Sie, daß $TM$ mit diesem Atlas zu einer Mannigfaltigkeit wird. Zeigen Sie weiter, daß die Projektion $\pi\colon TM \to M$, die jeden Tangentialvektor $X \in T_pM$ auf seinen Fußpunkt $p$ abbildet, eine Submersion ist.

**Aufgabe 3.** Wie sieht die Basiswechselmatrix von der Gaussbasis bezüglich sphärischer (zylindrischer) Koordinaten im 3–dimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ auf die Standardbasis aus?

**Aufgabe 4.** Sei $M$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ein *Funktionenkeim* in $p \in M$ ist eine Äquivalenzklasse von differenzierbaren, in einer Umgebung von $p$ definierten Funktionen, wobei zwei Funktionen äquivalent heißen, wenn sie in einer Umgebung von $p$ übereinstimmen. Eine Derivation auf dem Ring $R_p$ der Funktionskeime in $p$ ist eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung $\delta_p\colon R_p \to \mathbb{R}$ mit

$$\delta_p(fg) = \delta_p(f)g(p) + f(p)\delta_p(g).$$

Zeigen Sie, daß die Richtungsableitung einen kanonischen Isomorphismus zwischen $T_pM$ und dem Vektorraum der Derivationen definiert. (Tip: Sie dürfen benutzen, daß sich $f \in R_p$ in einer Karte $\varphi = (x_1, ..., x_n)$ bei $p$ schreiben läßt als

$$f = f(p) + \sum_i (x_i - x_i(p))g_i$$

für geeignete $g_i \in R_p$, vgl. Beweis von Lemma 3.2 im Hitchin-Skript. Folgern Sie daraus, daß $\delta_p$ eindeutig bestimmt ist durch $\delta_p(x_1)$,..., $\delta_p(x_n)$.)

**Aufgabe 5.** Zeigen Sie, daß die Verkettung zweier differenzierbarer Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten wieder differenzierbar ist. Formulieren und beweisen Sie die Kettenregel in diesem Kontext.

**Aufgabe 6.** Zeigen Sie, daß die Untermannigfaltigkeitsstruktur auf $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ diffeomorph zu der in der 1. Vorlesungswoche definierten Mannigfaltigkeitsstruktur auf $S^2$ ist.