Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen WS 2012

Einführung in Mannigfaltigkeiten : Übungsblatt 6

Wjatscheslaw Kewlin 29. November 2012

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 6. Dezember vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Sei $f\colon M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten. Seien X, Y Vektorfelder auf M und $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ Vektorfelder auf N, so daß $df_p(X_p) = \tilde{X}_{f(p)}$ und $df_p(Y_p) = \tilde{Y}(f(p))$ für alle $p \in M$. Dann gilt

$$df_p([X,Y]_p) = [\tilde{X}, \tilde{Y}]_{f(p)} \qquad \text{für alle } p \in M.$$

Aufgabe 2. Jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ definiert ein Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

(i) Bestimmen Sie den Fluss von $v \in \mathbb{R}^2$.
(ii) Für welche $v \in \mathbb{R}^2$ beschreiben die Integralkurven Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.
(iii) Bestimmen Sie die Lie–Klammer zweier solcher Vektorfelder.

Aufgabe 3. Berechnen Sie den Kommutator $[V,W]$ der Vektorfelder

$$V = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}$$

und

$$W = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

auf $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$. Schreiben Sie V und W in Polarkoordinaten $(r,\varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$.

Aufgabe 4. Seien $v, w \in \mathbb{R}^3$, $V(x) = v \times x$ und $W(x) = w \times x$.

(i) Zeigen Sie, daß und wie die Drehungen um v mit Winkelgeschwindigkeit $|v|$ den Fluss von V erzeugen.
(ii) Zeigen Sie, daß $[V,W]_x = -(v \times w) \times x$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 5.* Zeigen Sie, daß das Vektorfeld, welches in sphärischen Koordinaten durch $X = \frac{\partial}{\partial\varphi}$ gegeben ist, sich glatt in die Pole fortsetzt. Berechnen Sie den Fluß des Vektorfeldes. (Tip: gibt man auf S^2 einen globalen Fluß an, der weg von den Polen das Vektorfeld X erzeugt, gilt die Glattheit an den Polen automatisch.)