Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen SS 2013

Analysis auf Mannigfaltigkeiten : Übungsblatt 1

Tetsuya Nakamura 18. April 2013

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 25. April vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß Pullback und Dachprodukt von Differentialformen wohldefinierte Abbildungen auf der deRham–Kohomologie induzieren.

Aufgabe 2.

- Exklären Sie den Zusammenhang zwischen den Differentialoperatoren der klassischen Vektoranalysis und dem de Rham–Komplex auf $U \subset \mathbb{R}^3$.
- Formulieren Sie die klassische Version des Poincare–Lemmas für 1–Formen. Beweise Sie diese "zu Fuß" (d.h. ohne den Beweis aus der Vorlesung zu benutzen).

Aufgabe 3. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, daß ein Operator

$$d \colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M),$$

so daß

i) $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$ für $\omega \in \Omega^k(M)$, $\eta \in \Omega^l(M)$,
ii) $d \circ d = 0$ und
iii) df für $f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$ die gewöhnliche Ableitung ist,

eine eindeutige Einschränkung mit i) bis iii) auf jede beliebige offene Teilmengen von M besitzt. Folgern Sie die Existenz eines eindeutigen Operator auf M mit den Eigenschaften i) bis iii).

Anleitung: Folgern Sie aus i), daß zwei Formen, die auf einer offenen Menge übereinstimmen, dort auch die gleiche "Ableitung" d haben. (Hier brauchen Sie "Buckelfunktionen".) Folgern Sie weiter, daß man d "lokalisieren" kann, d.h. auf eine Form anwenden kann, die nur auf einer offenen Menge gegebenen ist. (Hier brauchen Sie nochmal Buckelfunktionen.) Zeigen Sie, daß es auf Koordinatengebieten nur eine mögliche Art gibt, d mit i) bis iii) zu definieren. Da diese lokale Formel kartenunabhängig ist (warum?), definiert sie einen eindeutigen globalen Operator d mit den gewünschten Eigenschaften.

Aufgabe 4. Beweisen Sie, daß für die Lie–Ableitung $\mathcal{L}_X\omega$ einer k–Form ω nach einem Vektorfeld X die Formel

$$\mathcal{L}_X\omega = d(\iota_X\omega) + \iota_X(d\omega)$$

gilt, wobei $\iota_X \omega$ das innere Produkt bezeichnet (d.h. X wird in den ersten Eingang von ω eingesetzt).

Anleitung: auf beiden Seiten der Identität stehen Operatoren, die den Grad von Formen erhalten, mit d kommutieren, die Leibnizregel (ohne $\pm$) erfüllen, und auf Funktionen übereinstimmen. Zeigen Sie (mit einem Lokalisierungsargument wie in Aufgabe 3.), daß es nur einen Operator mit diesen Eigenschaften geben kann.