Analysis auf Mannigfaltigkeiten : Übungsblatt 2

Tetsuya Nakamura 25. April 2013

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 2. Mai vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Eine geschlossene Form $\omega \in \Omega^1(M)$ ist genau dann exakt, wenn $\int_\gamma \omega = 0$ für alle geschlossenen Kurven γ.

Aufgabe 2. Berechnen Sie die Kohomologie von $\mathbb{RP}^2$. (Tip: $\mathbb{RP}^2$ kann man zerlegen in eine Scheibe und ein Möbiusband.)

Aufgabe 3. Sei

$$0 \to A^* \to B^* \to C^* \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Kokettenkomplexen. Haben zwei der drei Kokettenkomplexe endlichdimensionale Kohomologie, so auch der Dritte. Insbesondere gilt dann

$$\chi(B^*) = \chi(A^*) + \chi(C^*).$$

(Ist A^* ein Kokettenkomplex mit endlichdimensionaler Kohomologie, so bezeichnet man

$$\chi(A^*) = \sum_k (-1)^k \dim(H^k(A^*))$$

als seine *Euler–Charakteristik*.)

Aufgabe 4. Bezeichne $M = M_1 \# M_2$ die zusammenhängende Summe zweier kompakter, orientierbarer Flächen M_1 und M_2. Dann gilt:

$$\chi(M) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2.$$