Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen SS 2013

Analysis auf Mannigfaltigkeiten : Übungsblatt 3

Tetsuya Nakamura 2. Mai 2013

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 9. Mai vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Sei g eine Riemannsche Metrik auf einer Mannigfaltigkeit M. In lokalen Koordinaten $(U, \varphi = (x^1, ..., x^n))$ sei

$$g_{|U} = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j.$$

Die inverse Matrix zu g_{ij} bezeichnet man mit g^{ij}. Die Metrik g induziert einen Isomorphismus $\flat \colon TM \to T^*M$, $X \mapsto g(X, .)$. Bezeichne $\sharp \colon T^*M \to TM$ deren Inverse.

a) Geben Sie die Koordinatendarstellungen der beiden Isomorphismen $\flat$ und $\sharp$ bezüglich der Basisfelder an, die von den obigen Koordinaten induzierten werden.
b) Mittels $\sharp$ definiert g eine Metrik auf T^*M. Berechnen Sie deren Koeffizienten bezüglich der von den Koordinaten induzierten Basisfelder.

Aufgabe 2. Sei M eine Mannigfaltigkeit.

a) Zeigen Sie, daß die Spur von Endomorphismen auf TM unter dem Isomorphismus $T^*M \otimes TM \cong \mathrm{End}(TM)$ eine Abbildung
$$T^*M \otimes TM \to \mathbb{R}, \quad \alpha \otimes v \mapsto tr(\alpha \otimes v) := \alpha(v)$$
induziert.
b) Ist M mit einer Riemannschen Metrik g ausgestattet, so kann man mittels $\sharp$ auch die Spur $tr(b)$ einer Bilinearform $b \in T_p^*M \otimes T_p^*M$ auf einem Tagentialraum T_pM berechnen. Zeigen Sie, daß für $b \in T_p^*M \otimes T_p^*M$ gilt
$$tr(b) = \sum_i b(e_i, e_i),$$
wobei $e_1, ..., e_n$ eine (beliebige) Orthonormalbasis von (T_pM, g_p) ist.

Aufgabe 3. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. In lokalen Koordinaten $(U, \varphi = (x^1, ..., x^n))$ sei $g_{|U} = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j$. Zeigen Sie:

a) Die Christoffelsymbole Γ^k_{ij} sind gegeben durch

$$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2}(\sum_k \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) g^{kl}$$

(wobei ∂_k die partielle Ableitung in Richtung von x^k bezeichnet). Die Symmetrie der Christoffelsymbole in ij folgt alleine aus der Torsionsfreiheit von ∇.

b) Die lokalen Koeffizienten ${R_{ijk}}^l$ des Krümmungstensors sind

$${R_{ijk}}^l = \partial_i \Gamma^l_{jk} - \partial_j \Gamma^l_{ik} + \sum_r (\Gamma^r_{jk} \Gamma^l_{ir} - \Gamma^r_{ik} \Gamma^l_{jr})$$

wobei $R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum_l {R_{ijk}}^l \partial_l$.

Aufgabe 4. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und seien $(U, \varphi = (x^1, ..., x^n))$ Riemannsche Normalkoordinaten bezüglich eines Punktes $p \in U$ (insbesondere gilt also $x^j(p) = 0$). Zeigen Sie, daß

$$\sum_{ij} g_{ij} x^j x^j = \sum_i x^i x^i.$$