Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen SS 2013

Analysis auf Mannigfaltigkeiten : Übungsblatt 4

Tetsuya Nakamura 16. Mai 2013

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 28. Mai vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Eine Distribution auf dem Torus $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$ ist eine Linearform $F\colon \mathcal{D}(\mathbb{T}^n) \to \mathbb{C}$, die stetig bezüglich einer C^k–Norm ist, wobei $\mathcal{D}(\mathbb{T}^n) := C^\infty(\mathbb{T}^n)$ in diesem Kontext als Raum der Testfunktionen bezeichnet wird. Die Raum der Distributionen wird mit $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ bezeichnet.

a) Für eine Distribution $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ ist die Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_i}F$ definiert durch $\frac{\partial}{\partial x_i}F(g) = -F(\frac{\partial}{\partial x_i}g)$ wieder eine Distribution.

b) Jede Funktion $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ kann mittels $F(g) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n} fg$ als eine Distribution $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ aufgefaßt werden. Ist $f \in C^k(\mathbb{T}^n)$, so stimmen die gewöhnlichen Ableitungen mit den Ableitungen im Distributionensinn überein.

c) $W^k(\mathbb{T}^n)$ ist der Raum der L^2–Funktionen auf $\mathbb{T}^n$ deren Distributionenableitungen bis zur Ordnung k alle ebenfalls L^2–Funktionen sind. (Zeigen Sie, daß die Distributionenableitung auf den Fourierkoeffizienten von L^2–Distributionen genauso wirkt wie im Fall glatter Funktionen. Benutzen Sie die äquivalenten $\|.\|_{\tilde{W}^k}$–Normen.)

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß die Multiplikation mit einer $C^\infty(\mathbb{T}^n)$–Funktion einen stetigen Operator auf allen Sobolevräumen $W^k(\mathbb{T}^n)$ definiert. Folgern Sie, daß ein (skalarer) Differentialoperator $P = \sum_{|\alpha|\le l} b_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha_1}\ldots\partial x^{\alpha_n}}$ von Ordnung l mit glatten Koeffizienten $b_\alpha \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ einen stetigen Operator $W^{k+l}(\mathbb{T}^n) \to W^k(\mathbb{T}^n)$ induziert. (Da die glatten Funktionen in allen Sobolevräumen dicht liegen, reicht es, die Stetigkeit der Einschränkungen auf $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ bezüglich der entsprechenden Normen zu zeigen. Benutzen Sie wieder die äquivalenten $\|.\|_{\tilde{W}^k}$–Normen.)

Aufgabe 3. Es soll gezeigt werden, daß die Äquivalenzklassen der in der Vorlesung definierten Normen $\|.\|_{C^k}$ bzw. $\|.\|_{W^k}$ auf den glatten Schnitten $\Gamma(E)$ eines Vektorbündels E über einer kompakten Mannigfaltigkeit M unabhängig von den Wahlen der Karten und Trivialisierungen und der Partition der Eins sind. Anleitung:

a) Bezeichne $\Gamma_K(E)$ die Menge der glatten Schnitte von E mit Träger in einem Kompaktum $K \subset M$. Sei U mit $K \subset U$ Kartengebiet einer Karte φ mit Werten (in einer Menge von Durchmesser kleiner 2π) in $\mathbb{T}^n$ und Φ

eine Bündeltrivialisierung von $E_{|U}$. Zeigen Sie, daß die Äquivalenzklassen der durch φ und Φ definierten $\|.\|_{C^k}$ bzw. $\|.\|_{W^k}$–Normen auf $\Gamma_K(E)$ nicht von den Wahlen von φ und Φ abhängen. (Gegeben zwei Karten und zwei Trivialisierungen, kann man oBdA annehmen, daß die Kartengebiete gleich sind. Zeigen Sie separat, daß ein Wechsel der Karte zu einer äquivalenten Norm führt und daß ein Wechsel der Trivialisierung zu einer äquivalenten Norm führt.)

b) Gegeben zwei Partitionen der Eins $\{h_i\}$ und $\{g_j\}$ mit der Eigenschaft, daß die Träger K_i bzw. K_j der $\{h_i\}$ und $\{g_j\}$ alle in Kartengebieten wie unter a) liegen. Zeigen Sie, daß beide Partitionen der Eins auf äquivalente $\|.\|_{C^k}$– bzw. $\|.\|_{W^k}$–Normen auf $\Gamma(E)$ führen, wenn man Schnitte $s \in \Gamma(E)$ mittels der Partionen zerlegt $s = \sum_i h_j s = \sum_j g_j s$ und die Summen der wie in a) berechneten Normen der Summanden nimmt. (Tip: es reicht zu zeigen, daß $\{h_i\}$ und die Partition der Eins $\{h_i g_j\}$ auf äquivalente Normen führen.)

Aufgabe 4. Zeigen Sie, daß sich die in der Vorlesung bewiesenen Sätze 1-3 über Sobolevräume auf dem Torus direkt übertragen lassen auf die zu einem Vektorbündel E über einer kompakten Mannigfaltigkeit M gehörenden Sobolevräume $W^s(E)$. Zeigen Sie weiter, daß ein Differentialoperator $P\colon \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ von Ordnung l stetige Abbildungen $P\colon W^{k+l}(E) \to W^k(F)$ induziert. (Ein Differentialoperator $P\colon \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ von Ordnung l ist ein linearer Operator, der bezüglich lokaler Koordinaten und Trivialisierungen der Bündel von der Form $\sum_{|\alpha|\leq l} B_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ ist, wobei die Koeffizienten B_α matrixwertige glatte Funktionen sind.)