Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen SS 2013

Analysis auf Mannigfaltigkeiten : Übungsblatt 5

Tetsuya Nakamura 6. Juni 2013

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 13. Juni vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß eine formale Fourierreihe $\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(\nu)e^{i<\nu,x>}$, deren formale Ableitungen bis Ordnung k gleichmäßig konvergieren, eine C^k–Funktion beschreibt.

Aufgabe 2. Seien $W^s(\mathbb{T}^n)$, $s \geq 0$ und $\tilde{W}^k(\mathbb{T}^n)$, $k \in \mathbb{N}_*$ die Sobolevräume auf dem Torus $\mathbb{T}^n$ wie in Kapitel 3.b) der Vorlesung definiert. Zeigen Sie:

a) Für alle $s \geq 0$ ist $W^s(\mathbb{T}^n)$ (isometrisch) isomorph zu $L^2(\mathbb{T}^n)$.
b) Für alle $k \in \mathbb{N}_*$ ist $W^k(\mathbb{T}^n)$ isomorph zu $\tilde{W}^k(\mathbb{T}^n)$.

Aufgabe 3.

a) Sind E und F endlichdimensionale Vektorräume mit Skalarprodukt. Dann definiert

$$< e\otimes f, \tilde{e}\otimes\tilde{f} >_{E\otimes F} := < e, \tilde{e} >_E \;\cdot\; < f, \tilde{f} >_F$$

ein Skalarprodukt auf $E\otimes F$. Zeigen Sie: sind $\{e_i\}$ und $\{f_j\}$ Orthonormalbasen von E und F, so ist $\{e_i\otimes f_j\}$ eine Orthonormalbasis von $E\otimes F$.

b) Ein Skalarprodukt g auf einem endlichdimensionalen Vektorraum T definiert einen Isomorphismus $T \to T^*$ und damit ein Skalarprodukt auf T^*. Zeigen Sie: die duale Basis $\{\sigma^i\}$ zu einer Orthonormalbasis $\{e_i\}$ von T ist eine Orthonormalbasis von T^*.

c) Sei $\omega \in T^*\otimes ...\otimes T^*\otimes E$ eine l–lineare Form auf T mit Werten in E. Zeigen Sie: ist $\{e_i\}$ eine Orthonormalbasis von T, so gilt

$$< \omega, \omega >_{T^*\otimes...\otimes T^*\otimes E} = \sum_{i_1,...,i_l=1}^{n} < \omega(e_{i_1},...,e_{i_l}), \omega(e_{i_1},...,e_{i_l}) >_E .$$

(Tip: benutzen Sie $\omega = \sum_{i_1,...,i_l=1}^{n} \sigma^{i_1}\otimes...\otimes\sigma^{i_l}\otimes\omega(e_{i_1},...,e_{i_l})$, wobei $\{\sigma^i\}$ die duale Basis zu $\{e_i\}$ ist.)

Aufgabe 4. Sei φ eine glatte Funktion auf $\mathbb{R}^n$ mit Träger im Ball von Radius 1 und den Eigenschaften, daß $\varphi \geq 0$ und $\int_{[-\pi,\pi]^n} \varphi(x)dx = 1$. Dann nennt man

$$\varphi_k(x) := k^n \varphi(kx)$$

eine *Dirac–Folge*. Skizzieren Sie beispielhaft einige φ_k's. Im Folgenden fassen wir die φ_k durch Einschränken auf $[-\pi,\pi]^n$ und periodisches Fortsetzen als glatte Funktionen auf dem Torus $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / 2\pi\mathbb{Z}^n$ auf.

a) Zeigen Sie, daß für $f \in C^0(\mathbb{T}^n)$ die *approximierende Folge*

$$f_k(x) = \int_{\mathbb{T}^n} f(y)\varphi_k(x-y)dy$$

eine Folge glatter Funktionen ist, die in der C^0–Norm gegen f konvergiert.

b) Für $f \in C^k$ konvergiert f_k in der C^k–Norm. (Tip: mit partieller Integration kann man zeigen, daß für stetig differenzierbare Funktionen die approximierende Folge einer partiellen Ableitung gleich der partiellen Ableitung der approximierenden Folge ist.)

c) Sei E ein Vektorbündel über einer kompakten Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, daß die Vervollständigung $C^k(E)$ der glatten Schnitte $\Gamma(E)$ unter der C^k–Norm identifiziert werden kann mit dem Raum der Schnitte von E mit C^k–Koeffizienten. (Tip: In der Vorlesung wurde gezeigt, daß Elemente von $C^k(E)$ als Schnitte mit C^k–Koeffizienten interpretiert werden können. Es ist also zu zeigen, daß alle Schnitte mit C^k–Koeffizienten in der C^k–Norm durch glatte Schnitte approximiert werden können. Es reicht, dies für Schnitte zu zeigen, deren Träger K in einer offenen Menge liegt, die ein Kartengebiet ist auf dem das Bündel trivialisiert ist. Also kann man mit approximierenden Folgen auf dem Torus argumentieren. Der Trick dabei ist, daß der Träger der f_k für großes k nur wenig größer als der von f ist...)

Aufgabe 5. Zeigen Sie, daß für $f \in W^k(\mathbb{T}^n)$ die approximierende Folge

$$f_k(x) = \int_{\mathbb{T}^n} f(y)\varphi_k(x-y)dy$$

eine Folge glatter Funktionen ist, die in der W^k–Norm gegen f konvergiert, wobei φ_k eine Dirac–Folge wie in der vorhergehenden Aufgabe bezeichnet. (Tip: wie oben zeige man die Aussage erst im L^2–Fall und folgere dann induktiv den W^k–Fall. Dabei ist es nützlich, sich an die Distributionenableitung von Blatt 4 zu erinnern...)