Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen SS 2013

Analysis auf Mannigfaltigkeiten : Übungsblatt 6

Tetsuya Nakamura 13. Juni 2013

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 20. Juni vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Sei $P\colon \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ ein linearer Differentialoperator von Ordnung d. Das *Hauptsymbol* $\sigma(P) \in \Gamma(\mathrm{Sym}^d(TM) \otimes \mathrm{Hom}(E,F))$ von P ist

$$\sigma(P)_p(\xi_p)(\varphi_p) := \frac{1}{d!} P(f^d \varphi)_{|p},$$

wobei $\varphi \in \Gamma(E)$ mit $\varphi(p) = \varphi_p$ und $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ mit $f(p) = 0$ und $df_p = \xi_p$. Dabei identifizieren wir, via Polarisation, eine symmetrische d–lineare Abbildung von $T^*M \times ... \times T^*M$ nach $\mathrm{Hom}(E,F)$ mit der Abbildung von T^*M nach $\mathrm{Hom}(E,F)$, die man erhält, wenn man in alle Eingänge denselben Vektor $\xi_p \in T_p^*M$ einsetzt.

a) Zeigen Sie, daß $\sigma(P)$ wohldefiniert ist. Erklären Sie insbesondere, warum es für jedes $\xi_p \in T_p^*M$ eine Funktion f wie oben gibt. (Tip: in lokalen Koordinaten und Trivialisierung drückt sich $\sigma(P)$ durch die in der Vorlesung angegebene Formel aus.)

b) Wie lautet die Bedingung für Elliptizität von P in dieser Notation?

Aufgabe 2. Sei $A\colon D \subset H \to H$ ein unbeschränkter Operator. Zeigen Sie: A ist genau dann abschließbar, wenn der topologische Abschluß $\bar{\Gamma}_A$ des Graphen $\Gamma_A \subset H \times H$ von A wieder ein Graph ist. Der Abschluß von A, d.h. die kleinste abgeschlossene Erweiterung von A, ist dann genau der Operator, dessen Graph $\bar{\Gamma}_A$ ist.

Aufgabe 3. Sei $A\colon D \subset H \to H$ unbeschränkter Operator mit Definitionsbereich D in einem Hilbertraum H und Graph $\Gamma_A \subset H \times H$. Zeigen Sie:

a) Ist A dicht definiert, so ist der adjungierte Operator A^* abgeschlossen. (Ist A nicht dicht definiert, so ist A^* nicht wohldefiniert. Warum?)

b) Ist A abgeschlossen und dicht definiert, so ist A^* ebenfalls dicht definiert und es gilt $A^{**} = A$.

(Tip: der Graph von A^* ist $\Gamma_{A^*} = (J\Gamma_A)^\perp$, wobei $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.)

Aufgabe 4. Sei $V \to M$ ein komplexes Vektorbündel von Rang r über einer Riemannschen Fläche[1]. Mit $\bar{K}V$ bezeichnen wir das komplexe Rang r Vektorbündel der komplex anti–linearen Abbildungen von TM nach V, d.h. der Elemente von $T^*M \otimes V$, die $\omega \circ J = -i\,\omega$ erfüllen. Zeigen Sie: Ein Operator

$$\bar{\partial}\colon \Gamma(V) \to \Gamma(\bar{K}V),$$

der die Leibnizregel

$$\bar{\partial}(\varphi f) = (\bar{\partial}\varphi)f + \varphi(\bar{\partial}f)$$

für $\varphi \in \Gamma(E)$ und $f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$ erfüllt, ist elliptisch. Dabei bezeichnet

$$\bar{\partial}f = \frac{1}{2}(df + i\,df \circ J)$$

den kanonischen Operator $\bar{\partial}\colon \Gamma(\underline{\mathbb{C}}) \to \Gamma(\bar{K}\underline{\mathbb{C}})$, wobei $\underline{\mathbb{C}}$ das triviale komplexe Linienbündel auf M bezeichnet. Zeigen Sie, daß eine komplexwertige Funktion f genau dann holomorph ist, wenn $\bar{\partial}f = 0$. (Analog nennt man einen Schnitt $\varphi \in \Gamma(V)$ holomorph, wenn $\bar{\partial}\varphi = 0$.)

[1]Eine *Riemannsche Fläche* ist eine komplex 1–dimensionale Mannigfaltigkeit (mit holomorphem Atlas). Äquivalent kann man Riemannsche Flächen definieren als reell 2–dimensionale Mannigfaltigkeiten mit einem Tensorfeld $J \in \Gamma(TM)$ so daß $J^2 = -\,\mathrm{Id}$ (oder auch als Flächen mit konformer Struktur und Orientierung...). Das Tensorfeld J entspricht dabei der Drehung um $90°$ im Tangentialraum oder, wenn man den Tangentialraum lokal mittels einer holomorphen Karte mit $\mathbb{C}$ identifiziert, der Multiplikation mit i.