Analysis auf Mannigfaltigkeiten : Übungsblatt 7

Tetsuya Nakamura 20. Juni 2013

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 27. Juni vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 8 Punkte.

Aufgabe 1. Ein stetiger Operator $P\colon H \to H$ auf einem Hilbertraum H heißt Projektionsoperator, wenn $P^2 = P$.

a) Ist P Projektionsoperator, so ist $Id - P$ ebenfalls Projektionsoperator.
b) Ein Projektionsoperator P zerlegt den Raum $H = \ker(P) \oplus \mathrm{im}(P)$ in die direkte Summe zweier abgeschlossener Unterräume $\ker(P)$ und $\mathrm{im}(P)$.
c) Ist umgekehrt der Raum zerlegt $H = H_1 \oplus H_2$ in die direkte Summe zweier abgeschlossener Unterräume, so sind die Projektionsoperatoren P_1 und $P_2 = Id - P_1$ auf die Summanden stetig. (Tip: Der Satz von der stetigen Inversen impliziert, daß die bijektive Abbildung von $H_1 \oplus H_2$ (mit der Summennorm) nach H eine stetige Inverse hat.)
d) Die Zerlegung $H_1 \oplus H_2$ ist genau dann orthogonal, wenn die Projektionen selbstadjungiert sind. (Man spricht dann von Orthogonalprojektionen.)

Aufgabe 2. Sei H ein Hilbertraum. Ein abgeschlossener Operator

$$A\colon W \subset H \to H$$

heißt *Fredholm*, wenn $\ker(A)$ und $\mathrm{coker}(A)$ endlichdimensional sind. Zeigen Sie:

a) Ist A Fredholm, so sind $\ker(A)$ und $\mathrm{im}(A)$ abgeschlossen. (Tip: Um die Aussage über $\mathrm{im}(A)$ zu zeigen, erweitern Sie $A_{W \cap \ker(A)^\perp}$ zu einem bijektiven Operator und nutzen Sie den Satz von der stetigen Inversen.)
b) Ein abgeschlossener Operator A ist genau dann Fredholm, wenn es stetige Operatoren G, P und $Q\colon H \to H$ gibt, so daß G Bild in W hat, die Bilder von P und Q endlichdimensional sind, und

$$GA = Id - P \qquad \text{und} \qquad AG = Id - Q$$

(wobei die erste Gleichung auf W gilt). Die Operatoren P und Q können als Projektionsoperatoren gewählt werden.
c) Ist A selbstadjungiert und Fredholm, so kann man $P = Q$ als Orthogonalprojektion und G selbstadjungiert wählen.