Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen SS 2013

Analysis auf Mannigfaltigkeiten : Übungsblatt 8

Tetsuya Nakamura 27. Juni 2013

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 4. Juli vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Sei (M, g) eine kompakte und orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Aufgabe 1. Verifizieren Sie die in der Vorlesung angegebene Formel, die die Wirkung des Hodgeoperators $*$ auf einer positiven Orthonormalbasis beschreibt.

Aufgabe 2. Berechnen Sie die Hauptsymbole der Operatoren d, δ, D und Δ. Zeigen Sie, daß D und Δ elliptisch sind. (Tip: Produktregel für Symbole.)

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß der Greenoperator G von Δ mit $*$, d und δ kommutiert.

Aufgabe 4.

a) Zeigen Sie, daß der Kern von D mit dem Kern von Δ übereinstimmt.
b) Seien D^+ und D^- die Einschränkungen von D auf Formen gerader bzw. ungerader Ordnung. Zeigen Sie, daß D^+ formal adjungiert zu D^- ist.
c) Zeigen Sie: der Index von D^+ ist gleich der *Euler–Charakteristik*

$$\chi(M) = \sum_i (-1)^i b_i$$

von M, wobei $b_i = \dim H^i_{dR}(M)$ die sogenannten *Bettizahlen* von M sind.

Aufgabe 5. Zeigen Sie: harmonische Funktionen auf kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten sind konstant. Die Gleichung $\Delta f = g$ kann man genau dann lösen, wenn $\int_M g\, dV = 0$.