Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen SS 2013

Analysis auf Mannigfaltigkeiten : Übungsblatt 9

Tetsuya Nakamura 4. Juli 2013

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 11. Juli vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Die *Divergenz* $\operatorname{div}(X)$ eines Vektorfeldes X auf einer Mannigfaltigkeit mit einer Volumenform dV beschreibt

$$\operatorname{div}(X)dV := \mathcal{L}_X dV$$

die infinitesimale Volumenverzerrung durch den Fluß von X. (Ein Vektorfeld ist also genau dann divergenzfrei, wenn der lokale Fluß die Volumenform invariant läßt.)

Aufgabe 1. Sei (M, g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei dV die induzierte Volumenform und $\flat \colon TM \to T^*M$ der von der Metrik induzierten Isomorphismus. Zeigen Sie:

a) Für $X \in TM$ gilt $*(X^\flat) = \iota_X dV$.
b) Die Divergenz eines Vektorfeldes X ist $\operatorname{div}(X) = -\delta X^\flat = *d * X^\flat$.
c) Der Laplace–Beltrami Operator auf Funktionen ist $\Delta f = -\operatorname{div}(\operatorname{grad}(f))$.

(Erinnerung: der Gradient einer Funktion f ist das Vektorfeld, welches durch die Metrik mit df identifiziert wird.)

Aufgabe 2. Sei (M, g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, daß für $\omega \in \Omega^k(M)$ gilt:

$$d\omega(X_0, ..., X_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i (\nabla_{X_i}\omega)(X_0, ..., \hat{X}_i, ..., X_k)$$

und

$$\delta\omega = -\sum_{i=1}^{n} \iota_{e_i}(\nabla_{e_i}\omega),$$

wobei e_1,...,e_n lokale orthonormale Basisfelder von TM sind.

Aufgabe 3. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, daß das Bündel $S = \Lambda^* T^* M$ mit der induzierten Metrik, dem Levi–Civita Zusammenhang und dem Produkt

$$X \cdot \omega = X^\flat \wedge \omega - \iota_X \omega$$

ein Cliffordbündel ist. Der Dirac Operator dieses Cliffordbündels ist $D = d + \delta$. (Tip: Aufgabe 2 und $\iota_X(\alpha \wedge \omega) + \alpha \wedge (\iota_X \omega) = \alpha(X)\omega$.)

Aufgabe 4. Zeigen Sie, daß es Friedrichs Glätter F_ϵ zu jedem Vektorbündel E auf einer kompakten orientierbaren Mannigfaltigkeit M gibt. Anleitung:

a) Für triviale Bündel auf dem Torus $T^n = \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$ kann man (wie in Aufgabe 4 von Blatt 5) definieren
$$(F_\epsilon s)(p) := \int_{T^n} \varphi_\epsilon(p-q)s(q)dV(q),$$
wobei $\varphi_\epsilon(q) = \frac{1}{\epsilon^n}\varphi(\frac{q}{\epsilon})$ für $0 < \epsilon < 1$ die periodische Fortsetzung einer nicht–negativen glatten Funktion mit Integral 1 und Träger in $[-\epsilon, \epsilon]^n$ bezeichnet. *In Aufgabe 5 von Blatt 5 haben wir gesehen, daß für jede L^2–Funktion s die glatten Funktionen $F_\epsilon s$ in der L^2–Norm gegen s konvergieren, wenn $\epsilon \to 0$.*

Zeigen Sie, daß sowohl F_ϵ also auch $[B, F_\epsilon]$ für jeden Operator B erster Ordnung beschränkte Familien stetiger Operatoren auf L^2 sind. Tip: es reicht, Operatoren der Form $B = a(x)\partial_j$ mit glattem a zu betrachten. Mit partieller Integration gilt dann
$$[B, F_\epsilon](s)(p) = \int_{T^n} \varphi_\epsilon(p-q)\,\partial_j a(q)\,s(q)\,dV(q) + \dots$$
$$\dots + \int_{T^n} (\partial_j\varphi)_\epsilon(p-q)\,\frac{a(p)-a(q)}{\epsilon}\,s(q)\,dV(q).$$

b) Erklären Sie, wie man mittels Partition der Eins Friedrichs Glätter für allgemeine Bündel auf Mannigfaltigkeiten konstruieren kann.