Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen SS 2013

Analysis auf Mannigfaltigkeiten : Übungsblatt 10

Tetsuya Nakamura 11. Juli 2013

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 18. Juli vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß die Divergenz eines Vektorfeldes X auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) durch

$$\operatorname{div}(X) = \sum_i g(e_i, \nabla_{e_i} X)$$

gegeben ist, wobei $e_1, ..., e_n$ ein lokaler orthonormaler Rahmen von TM ist.

Aufgabe 2. Sei (M, g) eine kompakte, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit.

a) Zeigen Sie, daß der Diracoperator D eines Cliffordbündels über M (formal) selbstadjungiert ist. Berechnen Sie sein Hauptsymbol.
b) Verifizieren Sie die in der Vorlesung gegebene Formel für den (formal) Adjungierten Operator ∇^* eines metrischen Zusammenhangs ∇ auf einem hermiteschen Vektorbündel über M. Berechnen Sie das Hauptsymbol des dazugehörigen Bochner–Laplaceoperators $\Delta = \nabla^*\nabla$.

Aufgabe 3. Das Ziel dieser Aufgabe ist, die elliptische Abschätzung und Regularität für generalisierte Laplaceoperatoren auf kompakten Mannigfaltigkeiten aus den entsprechenden (und in der Vorlesung bewiesenen) Resultaten für Diracoperatoren zu folgern. Benutzen Sie dabei, daß jeder generalisierte Laplaceoperator Δ von der Form $\Delta = \nabla^*\nabla + H$ ist, wobei ∇ eine metrischer Zusammenhang und H ein symmetrischer Bündelendomorphismus ist.

Zeigen Sie (wie schon in der Vorlesung skizziert):

a) Die elliptische Abschätzung und Regularität gilt für Quadrate von Diracoperatoren. (Tip: hier kann die Youngsche Ungleichung helfen.)
b) Die elliptische Abschätzung und Regularität gilt für den Bochner–Laplaceoperator $\nabla^*\nabla$, da dieser die Einschränkung (auf Formen nullten Grades) des Quadrates D^2 eines geeignet getwisteten DeRham–Diracoperators D ist.
c) Da Δ eine Störung von $\nabla^*\nabla$ durch einen Operator nullter Ordnung ist, gilt die elliptische Abschätzung und Regularität auch für Δ.

Aufgabe 4. Sei Δ ein generalisierter Laplaceoperator auf einem hermiteschen Bündel E über einer kompakten Mannigfaltigkeit M. Zeigen Sie (analog dem Beweis für die Wärmeleitungsgleichung aus der Vorlesung):

a) $U_t = e^{-\frac{i}{\hbar}t\Delta}$ ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ ein unitärer Operator auf $L^2(E)$. Die Abbildung $t \mapsto U_t$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

b) Für jeden glatten Schnitt $u_0 \in C^\infty(E)$ gibt es eine eindeutige glatte Lösung der Schrödingergleichung
$$i\hbar\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = 0$$
auf $\mathbb{R} \times M$ mit Anfangswert u_0.

c) Erklären Sie, warum (anders als bei der Wärmeleitungsgleichung) die Fundamentallösung U_t nicht glättet, dafür aber auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

(Bemerkung: Ist $\Delta = D^2$ das Quadrat eines Diracoperators, so kann die Wellengleichung
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D^2 u = 0$$
auf $\mathbb{R} \times M$ für beliebige glatte Anfangsbedingungen u_0 und $\dot{u}_0$ gelöst werden, indem man Lösungen der beiden Gleichungen
$$\frac{\partial u}{\partial t} \pm iDu = 0$$
überlagert. Ähnlich kann man im allgemeineren Fall daß Δ nicht–negatives Spektrum hat verfahren, denn dann kann man mittels Spektralkalkül eine positive Wurzel aus Δ ziehen.)