

---

Geometrie : Übungsblatt 2

---

Wjatscheslaw Kewlin

22. Oktober 2013

**Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und bis vor der Vorlesung am 31. Oktober abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.**

**Aufgabe 1.** Sei  $(V, \langle, \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum und  $d(P, Q) = \|P - Q\|$  die von der euklidischen Norm induzierte Abstandsfunktion.

- i) Beweisen Sie die Dreiecksungleichung

$$d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$$

für  $P, Q$  und  $R \in V$  und zeigen Sie, daß Gleichheit in der Dreiecksungleichung genau dann gilt, wenn die drei Punkte auf einer Geraden liegen und  $R$  Konvexkombination von  $P$  und  $Q$  ist, also “zwischen  $P$  und  $Q$  liegt” im Sinne, daß

$$R = \lambda P + (1 - \lambda)Q$$

für  $\lambda \in [0, 1]$ .

- ii) Charakterisieren Sie Geraden mittels der Abstandsfunktion (ohne Verwendung von linearer Algebra).  
iii) Folgern Sie, daß Isometrien eines euklidischen Vektorraumes Geraden auf Geraden abbilden.

**Aufgabe 2.** Zeigen Sie, daß eine bijektive Abbildung  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  genau dann den euklidischen Abstand erhält, wenn sie eine euklidische Bewegung, d.h. eine Verkettung von  $A \in O(2)$  mit einer Translation, ist.

(Es ist klar, daß sowohl die euklidischen Bewegungen und als auch die Isometrien von  $\mathbb{R}^2$  eine Gruppe bilden und daß die Bewegungen in den Isometrien enthalten sind; zu zeigen ist also die Gleichheit beider Gruppen. Anleitung: zeigen Sie, daß es für je zwei Punktepaare  $P, Q$  und  $P', Q'$  mit  $d(P, Q) = d(P', Q')$  mindestens eine *Bewegung* (genau zwei Bewegungen)  $f$  gibt mit  $f(P) = P'$  und  $f(Q) = Q'$ . Zeigen Sie, daß es genau zwei *Isometrien* gibt, die  $P = (0, 0)$  und  $Q = (r, 0)$  mit  $r > 0$  festhalten, und daß diese Isometrien Bewegungen sind. Folgern Sie die Behauptung.)

**Aufgabe 3.** Seien  $P_1, \dots, P_N$  und  $Q_1, \dots, Q_N$  zwei  $N$ -Tupel von Punkten in  $\mathbb{R}^2$ . Zeigen Sie, daß es genau dann eine Bewegung  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $f(P_i) = Q_i$  für alle  $i = 1, \dots, N$  gibt, wenn  $d(P_i, P_j) = d(Q_i, Q_j)$  für alle  $i, j = 1, \dots, N$  gilt. Die Bewegung ist eindeutig, wenn die Punkte nicht kollinear sind. (Tip: zeigen Sie erst den Fall  $N = 3$  und folgern Sie den allgemeinen Fall.)

**Aufgabe 4.** Seien  $P_1, \dots, P_4$  und  $Q_1, \dots, Q_4$  zwei Quadrupel von Punkte in der reell projektiven Ebene  $\mathbb{RP}^2$  mit der Eigenschaft, daß in beiden Quadrupeln keine drei Punkte kollinear sind. Zeigen Sie, daß es eine eindeutige projektive Transformation  $f: \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  gibt mit  $f(P_i) = Q_i$  für  $i = 1, \dots, 4$ .

**Aufgabe 5.\*** Sei  $M$  eine Menge und  $G$  eine Gruppe, die auf  $M$  wirkt. Man spricht von einem *homogenen Raum* bzw. eine *transitiven Gruppenwirkung*, wenn “alle Punkte von  $M$  gleich aussehen” in dem Sinne, daß es für je zwei Punkte  $P, Q \in M$  eine Symmetrie  $g \in G$  gibt mit  $g(P) = Q$ .

- i) Zeigen Sie, daß es dann für jeden Punkt  $P \in M$  eine kanonische Identifikation

$$M \cong G/H$$

gibt zwischen Punkten der Menge  $M$  und Rechtsnebenklassen von  $G$  bezüglich der *Standgruppe* bzw. *Isotropiegruppe*  $H$  von  $P$ , d.h. der Untergruppe aller Transformationen, die  $P$  festhalten.

- ii) Berechnen Sie die Isotropiegruppe des Punktes  $O$  und die Nebenklassendarstellung für  $M = \mathbb{R}^2$  und  $G$  die Gruppe der affinen Transformationen.  
 iii) Berechnen Sie die Isotropiegruppe des Punktes  $P = (1, 0, 0)$  und die Nebenklassendarstellung der Wirkung von  $G = SO(3)$  auf der 2-Sphäre

$$M = S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$