Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen WS 2013/2014

Geometrie : Übungsblatt 3

Wjatscheslaw Kewlin 29. Oktober 2013

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und bis vor der Vorlesung am 7. November abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Sei X ein affiner Raum der Dimension d über $\mathbb{K}$ (d.h. der dazugehörige $\mathbb{K}$–Vektorraum V hat Dimension d) und sei P_i, $i \in I$ eine Familie von Punkten in X. Man sagt, die Punkte P_i, $i \in I$ seien *in allgemeiner Lage*, wenn jede Teilmenge von $k+1$ Punkten mit $k \leq d$ einen affinen Unterraum der Dimension k erzeugt. Eine *affine Basis* von X ist eine $d+1$–elementige Menge von Punkten in allgemeiner Lage. Zeigen Sie:

a) Die Punkte P_i, $i \in I$ sind in allgemeiner Lage, wenn jede $(k+1)$–elementige Teilmenge mit $k+1 = \min(d+1, |I|)$ einen affinen Unterraum der Dimension k erzeugt (wobei $|I|$ die Mächtigkeit von I bezeichne).
b) Sei P_0, ..., $P_d \in X$ eine affine Basis und seien Q_0, ..., $Q_d \in Y$ beliebige Punkte eines affinen Raumes Y, so gibt es eine eindeutige affine Abbildung $f\colon X \to Y$ mit $f(P_i) = Q_i$, $i = 0, ..., d$. Diese Abbildung ist genau dann bijektiv, wenn Q_0, ..., Q_d eine affine Basis von Y ist.
c) Formulieren Sie den Fall $d = 2$ und $X = Y$ von b) um in einen Satz über Dreiecke in der affinen Ebene.

(Bemerkung: Eine zweielementige Menge von Punkten in einem affinen Raum von Dimension $d \geq 1$ ist in allgemeiner Lage, wenn die Punkte verschieden sind und damit eine Gerade aufspannen. Eine dreielementige Menge in einem affinen Raum von Dimension $d \geq 2$ ist in allgemeiner Lage, wenn die Punkte nicht kollinear sind und damit ein nicht–triviales Dreieck definieren.)

Aufgabe 2. Seien P_0, ..., P_N Punkte eines affinen Raumes X über $\mathbb{K}$. Dann:

a) Für λ_0, ..., $\lambda_N \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{i=0}^N \lambda_i = 1$ ist
$$\sum_{i=0}^N \lambda_i P_i := Q + \sum_{i=0}^N \lambda_i \overrightarrow{QP_i}$$
unabhängig von $Q \in X$.
b) Eine Teilmenge $Y \subset X$ ist genau dann ein affiner Unterraum, wenn für alle P_0, ..., $P_N \in Y$ und λ_0, ..., $\lambda_N \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{i=0}^N \lambda_i = 1$ auch gilt, daß
$$\sum_{i=0}^N \lambda_i P_i \in Y.$$

c) Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen affinen Räumen ist genau dann affin, wenn für alle P_0, ..., $P_N \in X$ und λ_0, ..., $\lambda_N \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{i=0}^N \lambda_i = 1$ gilt

$$f(\sum_{i=0}^N \lambda_i P_i) = \sum_{i=0}^N \lambda_i f(P_i).$$

d) Eine Menge P_0, ..., $P_N \in X$ ist genau dann eine affine Basis, wenn jeder Punkt $P \in X$ auf eindeutige Weise dargestellt werden kann als

$$P = \sum_{i=0}^N \lambda_i P_i.$$

(Dann ist N gleich der Dimension d des Raumes und man bezeichnet die λ_0, ..., λ_d auch als *baryzentrische Koordinaten*.)

e) Eine Teilmenge $C \subset X$ eines affinen Raumes über $\mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn für alle P_0, ..., $P_N \in C$ und λ_0, ..., $\lambda_N \geq 0$ mit $\sum_{i=0}^N \lambda_i = 1$ gilt, daß

$$\sum_{i=0}^N \lambda_i P_i \in C.$$

(Tip: Bei b)–d) ist die geschickte Wahl eines Ursprungs hilfreich.)

Aufgabe 3. Umgekehrt zur Reihenfolge in der Vorlesung, sollen die Strahlensätze hier direkt bewiesen und daraus dann der Satz von Thales hergeleitet werden.

a) Man wende eine *Streckung mit Zentrum O*, d.h. eine affine Abbildung f mit $f(O) = O$ und $\overrightarrow{f(O)f(P)} = \lambda\overrightarrow{OP}$ für $\lambda \in \mathbb{K}_*$, an auf ein Dreieck OAA' und leite daraus einen alternativen Beweis der Strahlensätze her.

b) Folgern Sie den Satz von Thales aus dem 1. Strahlensatz. (Tip: führe eine passende dritte Gerade ein, die die zwei gegebenen Geraden schneidet.)

Aufgabe 4. (Eine Anwendung des Strahlensatzes.) Streckt man einen Arm nach vorne aus mit nach oben erhobenem Daumen, so daß die Nase auf den Daumen zeigt, und schließt dann abwechselnd ein Auge, so springt der Daumen hin und her. Blickt man dabei auf eine Ebene, die senkrecht zur Blickrichtung steht, so ist der Abstand von dieser Ebene ungefähr gleich zehn mal dem Abstand der zwei durch die beiden Positionen des Daumen beschriebenen Punkte auf dieser Ebene. Bestimmen Sie Ihren persönlichen Faktor für die Anwendung dieser Methode zur Entfernungsschätzung.

Aufgabe 5.* Eine Menge X mit einer einfach transitiven Wirkung einer Gruppe G bezeichnet man als *G–Torsor*. Zeigen Sie: die Menge der Basen eines endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$–Vektorraumes V wird zu einem $Gl(V)$–Torsor, indem man $Gl(V)$ von links auf Basen wirken läßt. (Hat V die Dimension n, so bilden die Basen auch einen $Gl_n(\mathbb{K})$–Torsor bezüglich der Rechtswirkung von $Gl_n(\mathbb{K})$.)