

Geometrie : Übungsblatt 10

Wjatscheslaw Kewlin

7. Januar 2014

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und bis vor der Vorlesung am 16. Januar abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Zeigen Sie mit dem Strahlensatz, daß bei einem regulären Fünfeck

- das Verhältnis der Längen der Diagonalen zu den Längen der Seiten gleich dem Goldenen Schnitt ist und
- eine Diagonale beim Schnitt mit einer anderen Diagonale im Verhältnis des Goldenen Schnittes geteilt wird.

Aufgabe 2. Zeigen Sie induktiv, daß für jeden zusammenhängenden Graph in der Ebene \mathbb{R}^2 die Formel

$$E - K + F = 1$$

gilt. Folgern Sie mittels stereographischer Projektion die entsprechende Formel für zusammenhängende Graphen auf S^2 .

Aufgabe 3. Sind v_1, \dots, v_n Punkte in \mathbb{R}^3 . Zeigen Sie, daß die *konvexe Hülle* dieser Punkte, d.h. die kleinste konvexe Menge, welche v_1, \dots, v_n enthält, gleich

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

ist.

Die *Eckpunkte* des konvexen Polyeders P sind die v_i , welche nicht als Konvexkombination der restlichen Punkte $\{v_1, \dots, v_n\} \setminus \{v_i\}$ darstellbar sind (die sogenannten "Extrempunkte" der konvexen Menge P). Die *Kanten* von P sind die konvexen Hüllen von Paaren von Eckpunkten, die im topologischen Rand ∂P von P enthalten sind. Die *Seiten* von P sind die konvexen Hüllen von Teilmengen der Eckpunktmenge mit mindestens drei Elementen, die im topologischen Rand ∂P von P enthalten sind.

Beschreiben Sie einen Würfel und ein Tetraeder durch die explizite Angabe passender Eckpunkte. Beschreiben Sie die Kanten und Seiten beider Körper durch Angabe der entsprechenden Eckpunktmenge.

Aufgabe 4. Zeigen Sie:

- Wählt man auf einem Würfel vier Eckpunkte, welche paarweise nicht benachbart sind, so sind diese die Eckpunkte eines anderen platonischen Körpers.
- Die Mittelpunkte der Kanten des unter a) erzeugten platonischen Körpers sind wieder Eckpunkte eines platonischen Körpers.

Fertigen Sie eine Skizze der Konstruktion an.