Geometrie : Übungsblatt 4

4. November 2014

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und bis vor der Vorlesung am 13. November abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Seien Y und $\tilde{Y}$ Ebenen in einem reell dreidimensionalen affinen Raum X und W' eine Richtung, die weder parallel zu Y noch zu $\tilde{Y}$ ist. Berechnen Sie die Koordinatendarstellung

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + b$$

der Parallelprojektion $\tilde{Y} \to Y$ entlang W' bezüglich der Koordinaten, die durch die Wahl affiner Basen Q, P_1, P_2 und $\tilde{Q}$, $\tilde{P}_1$, $\tilde{P}_2$ auf Y bzw. $\tilde{Y}$ eingeführt werden, indem Punkte von Y dargestellt werden durch Koordinaten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ via

$$Q + x\overrightarrow{QP_1} + y\overrightarrow{QP_2}$$

und analog für $\tilde{Y}$. Behandeln Sie zuerst den allgemeinen Fall und erklären Sie dann, wie die Koordinatendarstellung der Parallelprojektion in dem speziellen Fall aussieht, daß die Basis $\tilde{Q}$, $\tilde{P}_1$, $\tilde{P}_2$ durch die Parallelprojektion auf Q, P_1, P_2 abgebildet wird.

(Anleitung: Identifizieren Sie X mit seinem Vektorraum V_X, indem Sie Q als Urspung auszeichnen. Arbeiten Sie mit einer angepassten Basis v_1, v_2, v_3 von $X = V_X$, bezüglich der $P_1 = v_1$ und $P_2 = v_2$ und W' von v_3 erzeugt wird. Wählen sie eine sinnvolle Bezeichnug für die Koordinaten von $\tilde{Q}$, $\tilde{P}_1$, $\tilde{P}_2$ bezüglich der Basis v_1, v_2, v_3.)

Aufgabe 2. Als *Menelaos Konfiguration* bezeichnen wir nicht kollineare Punkte A, B, $C \in \mathbb{R}^2$ und Punkte $A' \in BC$, $B' \in AC$, $C' \in AB$ mit $\{A, B, C\} \cap \{A', B', C'\} = \emptyset$, so daß

$$\frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB'}}{\overrightarrow{B'A}} = -1.$$

Zeigen Sie:

a) Für einen oder drei der Punkte A', B', C' gilt, daß er nicht auf der entsprechenden Seite des Dreiecks ABC liegt (sondern in ihrem Komplement auf der entsprechenden Geraden).

b) Menelaos Konfigurationen stehen in bijektiver Korrespondenz zu Quadrupeln von Geraden l_0, l_1, l_2, $l_3 \subset \mathbb{R}^2$, die sich paarweise in genau einem Punkt schneiden, so daß die sechs Schnittpunkte paarweise verschieden sind.

Aufgabe 3.* Geben Sie einen "physikalischen Beweis" des Satzes von Ceva im Fall, daß A', B', C' auf den Seiten des Dreiecks ABC liegen, indem Sie eine Bedingung herleiten, unter der man Gewichte m_A, m_B, m_C so an den Eckpunkten anbringen kann, daß die A', B', C' genau die Schwerpunkte der Seiten sind. Unter dieser Bedingung schneiden sich die AA', BB', CC' aus physikalischen Gründen im Schwerpunkt der Massen m_A, m_B, m_C.

Aufgabe 4. Als *Ceva Konfiguration* bezeichnen wir nicht kollineare Punkte A, B, $C \in \mathbb{R}^2$ und Punkte $A' \in BC$, $B' \in AC$, $C' \in AB$ mit $\{A,B,C\} \cap \{A',B',C'\} = \emptyset$, so daß

$$\frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB'}}{\overrightarrow{B'A}} = 1.$$

Zeigen Sie:

a) Entweder liegen alle oder genau einer der Punkte A', B', C' auf den entsprechenden Seiten des Dreiecks ABC.
b) Gegeben eine Ceva Konfiguration, so schneiden sich entweder AA', BB' und CC' in einem Punkt, oder $AA' \parallel BB' \parallel CC'$.
c) Ceva Konfigurationen, für die sich AA', BB' und CC' in einem Punkt P schneiden, stehen in bijektiver Korrespondenz zu bestimmten Quadrupeln (l_1, l_2, l_3, P) bestehend aus drei Geraden l_1, l_2, $l_3 \subset \mathbb{R}^2$, die sich paarweise in genau einem Punkt schneiden, und einem Punkt P mit $P \notin l_k$, $k = 1, 2, 3$. Welche dieser Quadrupel entsprechen keinen Ceva Konfigurationen? Welche Quadrupel entsprechen den Ceva Konfigurationen, bei denen A', B' und C' auf den Seiten des Dreiecks ABC liegen?

Aufgabe 5. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Ceva folgende Sätze der Dreicksgeometrie (wobei Dreieck hier im nicht–ausgearteten, also nicht kollinearen Sinn gemeint ist):

i) Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich.
ii) Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich.
iii) Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich.
iv)* Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich.
v)* Die Ecktransversalen durch die Berührpunkte des Inkreises schneiden sich (im sogenannten *Gergonne Punkt*).
vi)* Die Ecktransversalen durch die Berührpunkte der Ankreise schneiden sich (im sogenannten *Nagel Punkt*).

Aufgabe 6.* Zeigen Sie:

a) *(Satz von Pasch.)* Seien A, B, C nicht kollineare Punkte der reellen affinen Ebene. Eine Gerade l mit A, B, $C \notin l$ schneidet entweder zwei oder keine der Seiten des Dreiecks ABC. (Wählen Sie Koordinaten, bezüglich derer l die x–Achse ist.)
b) Für eine Ceva Konfiguration, bei der A', B' und C' auf den Seiten des Dreiecks ABC liegen, schneiden sich AA', BB' und CC' immer.