Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen SS 2016

Einführung in die Differentialgeometrie : Übungsblatt 2

PD Dr. Sebastian Heller 21. April 2016

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 3. Mai vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Für eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ gilt:

i) Die Ableitung N' eines Normalenvektorfeldes $N\colon I \to \mathbb{R}^3$ ist genau dann punktweise ein Vielfaches von T, wenn gilt
$$N' = - < N, T' > T.$$
ii) Erfüllt ein Vektorfeld $N\colon I \to \mathbb{R}^3$ die Differentialgleichung aus i) und gilt in einem Punkt
$$N(t) \perp T(t) \qquad \text{und} \qquad \|N(t)\| = 1,$$
so gilt dies in allen Punkten.

iii) Erfüllt $N\colon I \to \mathbb{R}^3$ die Bedingungen aus i) und ii), so erfüllt auch
$$B = T \times N = JN$$
beide Bedingungen.

iv) Erfüllt N die Bedingungen aus i) und ii), so erfüllt auch
$$\tilde{N} = e^{\alpha J} N = (\cos(\alpha) + \sin(\alpha) J) N$$
mit $\alpha \in \mathbb{R}$ die Bedingungen aus i) und ii), und alle $\tilde{N}$ die i) und ii) erfüllen sind von dieser Form.

Bemerkung: In dieser Aufgabe geht es darum, einige Tatsachen zu verifizieren, die in der Vorlesung implizit benutzt wurden (im Beweis der Existenz paralleler Rahmen und deren Eindeutigkeit bis auf Drehung).

Aufgabe 2. Eine Raumkurve $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ nimmt genau dann Werte in einer affinen Ebene an, wenn ihre komplexe Krümmung Werte in einer reellen Gerade durch den Ursprung annimmt. Sie nimmt genau dann Werte in einer Sphäre von Radius $R > 0$ an, wenn ihre komplexe Krümmung Werte in einer reellen Gerade mit Abstand $1/R$ vom Ursprung annimmt.

Aufgabe 3. Eine nach Bogenlänge parametrisierte Frenet–Kurve mit Krümmung κ und Torsion τ hat komplexe Krümmung
$$\Psi = \kappa\, e^{i \int \tau}.$$

Aufgabe 4. Die Krümmung einer regulären Frenet–Kurve $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ ist

$$\kappa = \frac{\|\gamma' \times \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3}$$

und ihre Torsion ist

$$\tau = \frac{\det(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{\|\gamma' \times \gamma''\|^2}.$$