Prof. Dr. Christoph Bohle — Tübingen SS 2016

Einführung in die Differentialgeometrie : Übungsblatt 3

PD Dr. Sebastian Heller — 28. April 2016

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 10. Mai vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Parametrisieren Sie den Zylinder $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Berechnen Sie die Fundamentalformen, die Hauptkrümmungen sowie Gaußsche und mittlere Krümmung.

Aufgabe 2. Seien g und h die erste und zweite Fundamentalform eines parametrisierten Flächenstücks, A dessen Weingartenoperator und K und H die Gaußsche und mittlere Krümmung.

a) Die Hauptkrümmungen κ_1, κ_2 erfüllen

$$\kappa_i^2 - 2H\kappa_i + K = 0.$$

b) Die dritte Fundamentalform des parametrisierten Flächenstücks ist

$$b =< dN, dN > .$$

Zeigen Sie

$$b(X, Y) = g(AX, AY)$$

für alle X, $Y \in \mathbb{R}^2$ (und alle Punkte im Definitionsbereich des Flächenstücks). Folgern Sie

$$b - 2Hh + Kg = 0.$$

Aufgabe 3. Berechnen Sie die erste Fundamentalform von

$$f_1(u, v) = \begin{pmatrix} \cosh(v)\cos(u) \\ \cosh(v)\sin(u) \\ v \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad f_2(u, v) = \begin{pmatrix} v\cos(u) \\ v\sin(u) \\ u \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine Umparametrisierung von f_2 an, deren erste Fundamentalform gleich der von f_1 ist. Berechnen Sie die Gaußsche und mittlere Krümmung von f_1 und der Umparametrisierung von f_2.

Aufgabe 4. Besteht ein zusammenhängendes parametrisiertes Flächenstück

$$f : U \to \mathbb{R}^3$$

nur aus Nabelpunkten, so nimmt f Werte in einer Ebene oder einer Sphäre an. (Anleitung: Zeigen Sie, daß dann $N_u = \kappa f_u$ sowie $N_v = \kappa f_v$. Folgern Sie aus dem Satz von Schwarz, daß κ konstant ist.)