Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen SS 2016

Einführung in die Differentialgeometrie : Übungsblatt 4

PD Dr. Sebastian Heller 3. Mai 2016

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 24. Mai vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß für die in der Vorlesung angegebene Parametrisierung von Rotationsflächen die Parameterlinien Krümmungslinien sind.

Aufgabe 2. Parametrisieren Sie einen Rotationstorus, berechnen Sie die Gaußsche Krümmung K und skizzieren Sie, wo K positiv, negativ und Null ist.

Aufgabe 3. Sei $f\colon U \to \tilde{U}$ ein Diffeomorphismus zwischen offenen Mengen U, $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft, daß $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$ in jedem Punkt paarweise orthogonal sind. Dann ist das parametrisierte Flächenstück

$$(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2, x_3)$$

für jedes x_3 nach Krümmungslinien parametrisiert (und analog für die beiden anderen Familien von Flächenstücken).

Aufgabe 4. Sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und N ein normiertes Normalenvektorfeld. Wir nehmen an, daß es $\epsilon_0 > 0$ gibt, so daß für alle ϵ mit $\epsilon_0 > \epsilon > 0$ die Abbildung

$$f(u, v) = \gamma(v) + \epsilon(\cos(u)N(v) + \sin(u)B(v))$$

mit $B = \gamma' \times N$ eine Immersion ist. Zeigen Sie, daß (γ', N, B) genau dann ein paralleler Rahmen ist, wenn die Koordinatenlinien von f orthogonal sind. Zeigen Sie weiter, daß die Koordinatenlinien dann Krümmungslinien sind.