Einführung in die Differentialgeometrie : Übungsblatt 5

PD Dr. Sebastian Heller 12. Mai 2016

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 31. Mai vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Erklären Sie, wie man

$$S^n = \{(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + ... + x_n^2 = 1\}$$

mittels stereographischer Projektionen zu einer Mannigfaltigkeit machen kann.

Aufgabe 2. Sei $\mathcal{A}$ ein differenzierbarer Atlas auf einer Menge M. Zeigen Sie:

a) Das Kartengebiet jeder zulässigen Karte ist offen.
b) Die Menge der zulässigen Karten bildet einen Atlas. (Manchmal werden differenzierbare Strukturen über derartige maximale Atlanten definiert und nicht wie in der Vorlesung über Äquivalenzklassen von Atlanten.)

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß die projektiven Räume $\mathbb{KP}^n$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ durch die in der Vorlesung angegebenen Atlanten in der Tat zu Mannigfaltigkeiten werden. Genauer:

i) zeigen Sie, daß alle Kartenwechsel (und damit die Atlanten) differenzierbar sind,
ii) verifizieren Sie die Hausdorff–Eigenschaft und
iii) zeigen Sie, daß es eine abzählbare Basis der Topologie gibt.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, daß es auf $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ eine eindeutige Mannigfaltigkeitsstruktur gibt, bezüglich derer die Projektion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ ein lokaler Diffeomorphismus wird. Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ diffeomorph zu S^1 ist.

Aufgabe 5 (Freiwillig)**.** Eine Mannigfaltigkeit ist genau dann zusammenhängend, wenn sie wegzusammenhängend ist.