Einführung in die Differentialgeometrie : Übungsblatt 6

PD Dr. Sebastian Heller 2. Juni 2016

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 14. Juni vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Welche der folgenden Mengen sind Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^2$?

a) $\{e^{it} = (\cos(t), \sin(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$,
b) $\{(t, \sin(1/t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\}$,
c) $\{(t, \sin(1/t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\} \cup \{(0,t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$,
d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$
e) $\{(\cos(t), \sin(2t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in (-\pi/2, \pi/2)\}$
f) $\{(\cos(t), \sin(2t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in (-\pi/2, \pi)\}$

Aufgabe 2. Warum ist

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1|, |x_2|, |x_3| \leq 1 \text{ und } |x_i| = 1 \text{ für mindestens ein i}\}$$

keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$? Was ist die minimale Teilmenge $M' \subset M$, so daß $M \backslash M'$ eine Untermannigfaltigkeit ist? Kann man auf M eine mit der von $\mathbb{R}^3$ induzierten Topologie verträgliche differenzierbare Struktur definieren?

Aufgabe 3. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit und $q \in \mathbb{R}^N \backslash M$. Nimmt die Funktion $x \mapsto \|x - q\|$ im Punkt $p \in M$ ihr Minimum auf M an, so steht $p - q$ senkrecht auf T_pM.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, daß

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^4 + z^4 = 1\}$$

eine Untermannigfaltigkeit ist. Geben Sie eine Karte bei $p = (0,0,1) \in M$ an. Bestimmen Sie eine lineare Gleichung für T_pM.

(Freiwillig) Zeigen Sie, daß M diffeomorph zu S^2 ist. (Hier kann der Satz über die Umkehrabbildung für Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten nützlich sein.)

Aufgabe 5. (Freiwillig) Zeigen Sie, daß die Menge M_k der $m \times n$–Matrizen von Rang k eine Untermannigfaltigkeit bildet. Welche Dimension hat M_k? Tip: betrachten Sie zuerst die Teilmenge von M_k der

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

für die A eine invertierbare $k \times k$–Matrix ist, und zeigen Sie, daß eine derartige Matrix faktorisiert werden kann als

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & \mathrm{Id} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Id & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$