Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen SS 2016

Einführung in die Differentialgeometrie : Übungsblatt 7

PD Dr. Sebastian Heller 9. Juni 2016

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 21. Juni vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Sei $TM = \dot\bigcup_{p\in M} T_pM$ die disjunkte Vereinigung aller Tangentialräume einer Mannigfaltigkeit M. Zeigen Sie:

i) daß jeder Atlas $\mathcal{A}$ von M wie folgt einen Atlas auf TM definiert: für $(U, \varphi = (x_1, ..., x_n)) \in \mathcal{A}$ definiere
$$\Phi\colon TM_{|U} \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \qquad \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \mapsto (\varphi(p), v_1, ..., v_n),$$
wobei $TM_{|U} = \dot\bigcup_{p\in U} T_pM$ und $\frac{\partial}{\partial x_1}(p)$, ..., $\frac{\partial}{\partial x_n}(p)$ die durch (U, φ) definierte Gaussbasis von T_pM bezeichnet,

ii) daß TM mit diesem Atlas zu einer Mannigfaltigkeit wird,

iii) daß die Projektion $\pi\colon TM \to M$, die jeden Tangentialvektor $X \in T_pM$ auf seinen Fußpunkt p abbildet, eine Submersion ist und

iv) daß Vektorfelder genau die glatten Abbildungen $X\colon M \to TM$ mit $\pi \circ X = \mathrm{Id}_M$ sind.

Aufgabe 2. Wie sieht die Basiswechselmatrix von der Gaussbasis bezüglich sphärischer (zylindrischer) Koordinaten im 3–dimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ auf die Standardbasis aus?

Aufgabe 3. Sei $f\colon M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten. Seien X, Y Vektorfelder auf M und $\tilde X$, $\tilde Y$ Vektorfelder auf N, so daß $df_p(X_p) = \tilde X_{f(p)}$ und $df_p(Y_p) = \tilde Y_{f(p)}$ für alle $p \in M$. Dann gilt
$$df_p([X,Y]_p) = [\tilde X, \tilde Y]_{f(p)} \qquad \text{für alle } p \in M.$$

Aufgabe 4. Berechnen Sie den Kommutator $[V, W]$ der Vektorfelder
$$V = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}$$
und
$$W = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$
auf $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$. Schreiben Sie V und W in Polarkoordinaten $(r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$.

Aufgabe 5.* Zeigen Sie, daß das Vektorfeld, welches in sphärischen Koordinaten durch $X = \frac{\partial}{\partial \varphi}$ gegeben ist, sich glatt in die Pole fortsetzt.

Aufgabe 6.* Für welche Polynome $P(z)$ setzt sich $V = P(z)\frac{\partial}{\partial z}$ zu einem Vektorfeld auf $\mathbb{CP}^1$ fort?