Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen SS 2016

Einführung in die Differentialgeometrie : Übungsblatt 8

PD Dr. Sebastian Heller 16. Juni 2016

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 28. Juni vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Koordinatendarstellungen der von der Euklidischen Metrik induzierten Riemannschen Metrik auf $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ bezüglich der durch stereographische Projektion definierten Karten φ_N und φ_S.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Darstellungen der Euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^3$ in sphärischen Koordinaten und Zylinderkoordinaten. Geben Sie Koordinaten auf $\mathbb{R}^3$ an, bezüglich der die Koeffizienten der Metrik nicht diagonal sind.

Aufgabe 3. Die Minkowski–Metrik auf $\mathbb{R}^{n+1}$ ist die durch die quadratische Form $-x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2$ erzeugte indefinite, nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform.

a) Zeigen Sie, daß die Minkowski–Metrik des $\mathbb{R}^{n+1}$ eine Riemannsche Metrik auf
$$H^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid -x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = -1,\ x_0 > 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$
definiert.

b) Zeigen Sie, daß die stereographische Projektion mit Pol $(-1, 0, \ldots, 0)$ eine Isometrie zwischen H^n und dem Poincaréschen Ballmodel des hyperbolischen Raums, d.h. von $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$ mit der Metrik $g_x = \frac{4}{(1-|x|^2)^2}(dx_1^2 + ... + dx_n^2)$, ist.

Aufgabe 4. Beweisen Sie, daß das Möbiusband nicht orientierbar ist. (Stellen Sie das Möbiusband als parametrisierte Untermannigfaltigkeit M dar. Folgen Sie einem Einheitsnormalenvektorfeld entlang einer geschlossenen Kurve auf M, die nicht kontrahierbar ist.)

Aufgabe 5.* Sei $f\colon M \to N$ ein Diffeomorphismus zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten (M, g) und (N, h).

(i) Zeigen Sie, daß folgende drei Eigenschaften von f äquivalent sind: konform, winkeltreu und rechte Winkel bleiben erhalten.

(ii) Zeigen Sie, daß f genau dann eine Isometrie ist, wenn f konform und volumenerhaltend ist.