Prof. Dr. Christoph Bohle　　　　　　　　　　　　　　　　　Tübingen SS 2016

Einführung in die Differentialgeometrie : Übungsblatt 9

PD Dr. Sebastian Heller　　　　　　　　　　　　　　　　　　23. Juni 2016

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 5. Juli vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie, daß

$$\nabla_X Y = (d_X Y)^T$$

einen metrischen und torsionsfreien Zusammenhang definiert.

Aufgabe 2. Beweisen Sie

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{li} - \frac{\partial}{\partial x_l} g_{ij} \right) g^{lk},$$

wobei (g^{lk}) die zu (g_{ij}) inverse Matrix bezeichnet.

Aufgabe 3. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\tilde{g} = e^{2u} g$ mit $u \colon M \to \mathbb{R}$ glatt. Zeige Sie, daß für die zugehörigen Levi–Civita–Zusammenhänge gilt

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + du(X)Y + du(Y)X - g(X, Y)\, \operatorname{grad} u,$$

wobei $\operatorname{grad}(u)$ das Vektorfeld bezeichnet, welches eingesetzt in die Metrik g die Ableitung du von u ergibt.

Aufgabe 4. Zeigen Sie:

a) Der Paralleltransport entlang einer Kurve ist eine lineare Isometrie.
b) Der Paralleltransport zwischen Nord– und Südpol entlang von Großkreisen auf S^2 hängt vom Großkreis ab.